12

EXAMINATIO

&

EMENDATIO

Mathematicæ Hodiernæ.

Qualis explicatur in libris Johannis *Wallisii* Geometriæ Professoris *Saviliani* in Academia *Oxoniensi*.

Distributa in sex Dialogos.

Authore

THOMA HOBBES Malmesburiensi.

K

Aug: 31

LONDINI,

Excusum sumptibus *Andreæ Crooke*, sub signo Draconis viridis in Cœmiterio *B. Pauli*. 1660.

MVSEVM
BRITAN
NICVM

Clarissimo Viro Domino Verdusio nobili Aquitano Χαίρειν.

Charissime Verdusi,

Mitto ad te libellum recens editum, tibi do, & dedico. Primo, Quia placiturum credo. Mihine, tuus, inquies, hominis Haeretici? Ne tumultuare. Nihil hic invenies quod non possis sine scandalo Ecclesiæ tuæ approbare. Geometria, si hæretica est, tanto forte probabilior est. In doctrinis enim purè humanis, nihil tam Catholicum est quam Errare. Condonemus ergo mutuò (ut Homericè loquar σοὶ μὲν ἔγω, σὺ δέ μοι*) ea quæ diversè didicimus in Sacris. Secundò, Quia, ingenium tuum novi liberum, candidum, acutum.*

acutum. Poſtremò, Quia amicitiam noſtram aliquo modo ſignatam eſſe volui, nec alio potui. Quod tam paucis te alloquar, ſi id quoque amicitiæ tribueris, facies quod æquum eſt. Vale.

Servorum tuorum obſequentiſſimus

Jul. 1660. THO. HOBBES

Dialogus

Figuræ (præter eas quæ sunt impressæ in marginem) ad finem cujusq; *Dialogi* reperientur.

Dialogus

Errata ſic Corrigenda.

PAge 4. li. 27. *pro notâ ſe* lege *notaſſe*. p. 5. l. 27. pro A--$\frac{1}{2}$ lege A--$\frac{3}{2}$ p.6. l.16. pro *ipſa* lege *ipſi*. p.7. l.9 pro *A te* lege *Arte*. p.9. l. 40. pro *apponere* lege *opponere*. p. 19. l. 2. pro *entes* lege *orientes*. p.20. l. 10. pro *Geometria Arithmetica* lege *Geometria & Arithmetica*, & pro *ſcientia* lege *ſcientias*. p.24. l.17. pro *quod* lege *quid*, & l. 14. pro *effectione* lege *Affectione*. p.37. l.10. pro *è* lege *a*, & l. 15. pro *divisibili* lege *indiviſibili*,. p.40. l.20. pro *ita qua* lege *Itaq;*. p.43. l. 21. dele *&*. p. 53. l. 3. pro *Rationem* lege *Rationum*. p.61. l. 26. lege bipedalis bipedali addita. p. 119. l. penult. pro $\frac{1}{4}$-†$\frac{1}{2}$ lege $\frac{1}{4}$†$\frac{1}{8}$. p.123. l.19, dele *quod*. p.170. l.16. adde ad finem lineæ *ut* 2 ad 1.

Dialogus Primus.

B. SAlve mi *A.*

A. & tu mi B. Quid adfers novi?

B. Novum librum.

A. De qua re?

B. Mathematica.

A. Legiſtin'?

B. Legi.

A. Accuraténe ſcriptum?

B. Accuratiſſimè; quantum ſaltem ego judico.

A. Videam quæſo. [*Johan. Walliſii Oratio inauguralis. Matheſis univerſalis ſive Arithmeticum opus integrum, & adverſus Meibomii de proportionibus dialogum, tractatus Elenchticus.*] Quid illud ſibi vult, *Matheſis univerſalis, ſive Arithmeticum opus integrum?* Num Matheſin nihilo latius patere arbitratur quam Arithmetica?

B. Sic dixit fortaſſe, quod Doctrinam Rationum (quæ totam comprehendit Matheſin) Arithmeticæ potius conſiderationis eſſe judicaverit quam Geometricæ.

A. Quamobrem autem?

B. Cauſam quidem non oſtendit, ſed in Epiſtola dedicatoria illud affirmat, & ad Geometriam fuiſſe relegatam ab Arithmeticis, propterea quod ſine Geometria, magnam in calculandis fractionibus invenerunt difficultatem..

A. Eandemne rem eſſe cenſet Rationem & Fractionem?

B. Ita plane, & id pluribus tum hujus, tum aliorum ſuorum Librorum locis, diſertis verbis aſſerit.

A. Aſſerenti tantum, non etiam demonſtranti, non eſt neceſſe ut aſſentiamus.

tiamur. Sed legamus [*Quantumvis non sim ego prorsus nescius quanto subsidat intervallo*] Quantumvis *Wallisius* doctus sit Mathematicus, non est certè Latinæ linguæ peritissimus.

B. Rogo, quidni?

A. Quia qui dicit *Quantumvis* rem determinandam relinquit arbitrio tuo; qui dicit *Prorsus*, ipse determinat. Itaq; *Quantumvis* & *Prorsus* non cohærent. *Quantumvis doctus* Latinè dicitur, sed *Quantumvis doctissimus* non item. Similiter *Quantumvis magnus* dicitur, sed non *Quantumvis infinitus*. *Quantumvis* & *Etsi*, non idem sonant semper.

B. Negligentiæ huic, si hoc loco non Oratorem egisset, sed Mathematicum, facile ignosci potuisset.

A. Pergamus. [*Norunt melius quam ut mihi sit opus sigillatim illa repetendo singula immorari.*] Videturnè tibi verba hæc Latina esse?

B. Minime sane. Nam dictum oportuit *singulis*, ut & ipse alias loquitur.

A. Erratum ergo est Typographi. [*Unde hic solus selectus fuit qui serenissimam Angliæ Reginam Elizabetham in Græcis litteris instituat.*] Latinéne hoc?

B. Minime. Erat enim scribendum *institueret*.

A. Usus est ergo *tempore præsente* pro *præterito imperfecto*.

B. Ita.

A. An & sæpe?

B. Sæpissime.

A. Absolvamus ergo Typographum.

B. Recte. Verùm ego illum non laudavi a Grammatica, quanquam ipse alias non intelligere & loqui Latinè, dedecus esse censet Academico.

A.] *Numeros etiam reperimus ab ipsis mundi primordiis (prout in ætatum Patriarcharum Catalogo liquet) per Monadas, Decadas, Centuriasq; aptè dispositos, gradibus scilicet, ne inordinata numerorum multitudine & ἀταξίᾳ laboret calculus, vel quidem nullus omnino sit*] Quod iterum tempore præsente utatur pro imperfecto, quoniam tu ita vis, prætereo. Hoc tantùm a te quæro, utrum ab eo quod *Gen.* cap. 5. ætates Patriarcharum usque ad diluvium per centurias, decadas, monadas numerentur inferri possit, Numerorum nomina eo tempore ita ordinata fuisse.

B. Siquidem caput illud quintum ante diluvium scriptum fuisset, illatio illa esset bona. Sed quoniam vel a *Mose*, vel longo post *Mosem* tempore ab *Esdra* scriptum esse omnes consentiunt, fatendum est bonam non esse.

A. Desideramus ergo in *Wallisio* ἀκρίβειαν illam logices quam exigimus a Mathematicis [*Mathesis apud Chaldæos post Diluvium primò floruisse creditur, deinde apud Ægyptios---cum hoc tamen discrimine; Chaldæorum Astronomia, Ægyptiorum Geometria celebrata est.*] Un-

de

de scit? Quare creditur? Cui Historico? oportuit nominasse authorem suum. Nam contra, Astronomiam Chaldæos ab Ægyptiis didicisse author est Historiæ veteris transcriptor *Diodorus Siculus* in secunda parte Libri primi, sic scribens. *Chaldæos etiam dicunt, qui in Babylone sunt colonos Ægyptiorum, propter Astrologiam celebrari, quam a sacerdotibus Ægyptiis didicerunt.* Quis hæc conciliabit?

B. Etiam *Wallisium* credibile est, ejus quod hic dicit, authorem habuisse Historiographum aliquem; nam dissentire inter se Historicos mirandum non est.

A. [*Et præter varia Theoremata de novo inventa, ipsa inveniendi methodus multum facilitatur. Algebræ nempe, sive Analyticæ usus ultra quam qui veteribus innotuit, jam innotescit.*]

B. Quænam sunt illa Theoremata nova per Algebram inventa?

A. Intelligit fortasse ea quæ sunt in *Ougthredi* clave Mathematica. Sed tamen multa illis pulchriora in libro septimo *Pappi*, extant inventa per Algebram, etsi sine Symbolis demonstrata sint; sed neutrius Theoremata alia sunt quam quæ continentur in doctrina rectangulorum & triangulorum rectilineorum. Falsum etiam est (quod ille innuit) Algebram & Analyticam eandem esse rem. Falsum item Algebram methodum esse inveniendi. Sed hæc posterius magisque suo loco examinabimus. [*Astronomia eximiis inventis instauratur.*] Numerat hoc loco *observationem stellarum circa Jovem. Solis maculas. Saturni ansulas. Jovis fascias. Lunæ asperitatem.* Sed quid hæc ad Algebram? ne a Geometra quidem aut Astronomo ullo inventa hæc sunt, sed ab illiterato quodam Batavo. Nam illi cui inventio debetur Telescopii, debetur quoque detectio stellarum Jovialium, macularum solarium *&c.* nonne & tibi sic videtur?

B. Omnino.

A. [*Mathematum studia non modo pro ea quam in se habent veritate colenda esse (quæ tamen ipsa per se conspicua & ultra Scepticorum litigia posita animum reficiet valde & oblectabit) sed & quod rerum aliarum cognitioni non uno quidem nomine conducant multum.*] Id quod de studio Mathematicæ hic dicit, nonne tibi videtur dici etiam posse de studio Physicæ vel Ethicæ, vel Politicæ, vel denique scientiæ cujuscunque?

B. Non. Nam Theoremata Physicæ, quia actiones naturales pleræque sensum fugiunt; Ethica propter voluntatis humanæ inconstantiam; Politica propter Ethicæ ignorationem pauca possunt demonstrari. Præterea, habet Mathematica certa quædam & indubitata demonstrandi Principia; qualia sunt *Definitiones, Axiomata, Petitiones* quæ non habet neq; Politica, neq; Ethica, neq; etiam Physica. Quare Mathematicam extra litigia Scepticorum solam eminere recte dicit.

A. Nonne etiam rationis lineæ ad lineam, vel cujuslibet magnitu-

 dini

dinis ad aliam magnitudinem ἀκρίβεια sensum fugit? Potest tamen demonstrari. An non & veræ Physicæ sua inest veritas, quæ vel affirmativè vel negativè enuntiari potest? Nonne litigat cum Mathematicis non minùs quam cum Dogmaticis Sextus Empericus *Scepticus*? Præterea non minus oblectat animum in Physicis, vel Ethicis, vel Politicis inventa veritas, quàm in Geometricis.

B. Imo magis, quanto scilicet in illis sæpius erratur, quam in Geometria.

A. Etiam vocabula quibus in Physica, Ethica, Politica Philosopho utendum est, an definiri non possunt?

B. Possunt.

A. Cur ergo in his magis quam in illis desideras principia? An si assumerentur in Physicis, Ethicis, & Politicis Postulata, Petitionesq;, sicut in Euclidis Elementis Geometriæ, eone firmiores fore demonstrationes esse judicas? Si ita judicas, toto cœlo erras. Sunt enim eo infirmiores. Quicquid enim assumitur precariò naturam tollit demonstrationis.

B. Intelligo jam quid dicendum erat *Wallisio*, si sententiam suam ἀκριβῶς voluisset explicare, nempe, scientiam unam altera neq; veriorem, neq; evidentiorem esse, sed Doctores alium alio peritiorem esse, id est; veritatem magis intelligere, melius demonstrare, a tricis verborum meliùs cavere, & in illas, si forte incidat, faciliùs se inde extricare posse.

A. [*Vix item maturo magis judicio quispiam est quam qui rebus hisce exercitati, vel Sophismatum fallacias felicius deteget, vel Syllogismorum vires justamq; sequelam assequetur.*] Hoc quidem de exercitatis in rebus ipsis verum, sed de exercitatis in libris falsum.

B. Exemplo esse potest ipse Wallisius. Atq; hæc sufficiat notâ se in Oratione Inaugurali, nisi quod præterire non possum verba illius hæc. [*Quod ego interim non pro forma tantum opto.*] Nam *pro forma* vox est Scholastica, non Latina. Reliqua quæ summisse legi, vulgaria, vilia esse facile cum legebas ipse animadvertisti. Transeamus jam ad Epistolam Dedicatoriam.

A. [*Cum quæ in publicum prodeant, pro more scilicet (eoq; satis inveterato) nonnullis inscripta soleant prodire.*] Non intelligo hæc. An ille ipse quoties in publicum prodit, inscriptus (ἐπιγραφὸς) prodit?

B. Ad vocem illam Relativum *quæ*, subaudiendum est, pro Antecedente, non *Omnia*, sed *Scripta*.

A. Bene est. Hoc ergo vult, Edicta regum quando publica fiunt, inscripta esse, nimirum ipsorum nomina regum. Et verum est.

B. Ah, neq; sic intelligendum est, sed solummodo de libris.

A. Si se ita intelligi voluit, quam facilè scripsisse potuit; *Cum libri qui in publicum prodeunt* &c. (non *prodeant*, ut hic scriptum est.) Verùm non satis intelligo quid sibi hic vult vox ea *nonnullis*, quæ solitarie posita, sine

sine substantivo semper subauditam habet vocem *rebus*. Quibus ergo rebus inscribi solere dicit libros?

B. Quibus? nisi nominibus, ut (post *quinq;* aut *sex* versus) ex his verbis *vestra libuit nomina seligere, quibus qui sequitur tractatum duxerim inscribendum*, cuilibet manifestum esse potest.

A. At melius fuisset si præcedentia sequentibus prætulissent potius lucem quam debuissent, sed pergo. [*Id mihi maxime visum est incumbere, ut justissimis votis suis, quantum in me est, satisfaciam.*] *Suis* hic pro *illius* (nempe *D. H. Savilii*) non recte utitur. Sed nolle te Grammaticam hoc loco examinari oblitus eram. [*Ex quo, inquam hac (id est Symbolica) introducta est Vietæ, Ougthredi, Harriotti, Cartesii ope, quam ingentes fecerit profectus Mathesis universa, nemo hisce rebus vel leviter exercitatus ignorare possit.*] Audin?

B. Audio. *A.* Ne ipsi quidem Analyticæ per potestates ascribi possunt, quæ ille hic ascribit Symbolis; nam quæcunq; inveniri possunt per Symbola ista nova, inveniri etiam potuissent per antiquissima Symbola, nimirum verba. Deinde quinam sunt ingentes illi profectus quos fecisse dicit Mathesin universam ope authorum illorum quos hic nominat. Si mihi unam solummodo propositionem indicaveris Symbolicæ hujus ope inventam, præter aliquot Rectangulorum & Triangulorum rectilineorum metamorphoses, quæ & ipsæ sine Algebra inveniri potuerunt, concedam tibi omnia quæ dixeris, & quanquam per Algebram (ut nonnulli existimaverunt) nullum non Problema solvi posset, nihil tamen hoc ad laudem faceret Symbolorum; idem enim fieri per verba posset. Quæritur quis numerus sit, qui, sive assumens ternarium, sive multiplicans producit idem. Diceret *Wallisius*. Sit quæsitum *A*. Quare $3 + A = 3A$. Et (dempto utrinq; *A*) $3 = 2A$. & $A = \frac{3}{2}$ Nonne idem esset si diceremus 3 una cum *Quæsito* æquari triplo *Quæsito*, & duo Quæsita æquari ternario, & proinde Quæsitum æquari $\frac{3}{2}$ Vides ergo Symbolicam istam, quam jactant nil omnino propter Symbola sed propter solam a supposito ad consequentia ratiocinationem valere; quæ securius aliquanto, & multo magis perspicue perficitur Oratione.

B. At mihi quidem utilis videtur propter Symbolorim brevitatem.

A. Qui quæso? Nonne vim demonstrationum Symbolicè scriptarum quam Latinè memoria tenere difficilius est? Et quanquam Analytica per Symbola brevius scribatur quam Oratione plena, non tamen clarius, neq; ut a tam multis possit intelligi, partim quod eadem Symbola paucis sint communia, partim etiam quod verba ipsa (non sola Symbola) animo simul percurrenda sunt. Cur autem Arithmeticam speciosam ope *Vietæ*, *Ougthredi*, &c. introductam esse dicit? Quasi veteris Algebræ notæ, quibus Radix, Quadratum, Cubus, cæteraq;

Poteſtates ſignificabantur à *Diophanto* non eſſent Symbola.

B. Quid? Nihilne addidit Algebræ *Vieta*, ſed veterum notas cum literis Alphabeti tantum commutavit?

A. Nihil omnino.

B. Sed ipſam Artem ſive Methodum, quâ a ſuppoſito ad Quæſitum via breviſſima pervenitur, quis excogitavit primus?

A. Neſcio, niſi verum ſit (quod memini me alicubi legiſſe) fuiſſe Arabem quendam *Ghebrum*, a quo etiam artem ipſam (ſi modo Ars ſit potiùs quam caſus) denominatam eſſe *Algebram*. Symbola quidem addere, ſubtrahere, multiplicare, dividere Binomia, Trinomia, *&c.* Artis eſſe fateor, non magnæ. Sed ut ex ſuppoſito inveniatur id quod quæritur (niſi in facillimis quæſtionibus) id verò pernego. Quid enim Magiſtri Symbolycæ hodiernæ maximi *Ougthredus* & *Carteſius* Aliud præcipiunt, quàm ut pro Quantitate quæſita ſupponamus aliquam ex Alphabeto literam, & inde *apta* ratiocinatione procedamus ad Conſequentia? At ſi Ars eſſet, deberent quænam ſit illa *apta* ratiocinatio ipſa oſtendere. Quod cum non faciant, Algebriſtæ modò ab uno ſuppoſito, modò ab alio incipere, & modò unam, modò aliam viam ingredi coguntur. Adeo ut non minùs fortuito Quæſitum inveniunt quam ſi quis in cubiculo juſſus initio facto a limine diligenter totum cubiculum intentis oculis & animo percurrere inveniret latentem aciculam. Præterea, Logarithmos invenitne *Neperus* ope Algebræ? Aut qui Canonem condidit ſinuum, Tangentium & Secantium, per Arithmeticam ſpecioſam id fecit? Deniq; quæ Propoſitio inventa per Algebram non dependet a 16ª 6ⁱ Elementorum *Euclidis*, & a 47ª 1ⁱ ejuſdem, aliiſq; notiſſimis Propoſitionibus quas oportet prius ſcire quam quis poſſit uti regula Algebræ. Adeo Geometriæ Algebra debetur, non illi Geometria. Nam abſq; hac, Quæſitum, etſi in Æquatione contineatur ſæpiſſimè ignoratur. Imò verò ipſa *Analytica per Poteſtates* ſive cum Symbolis, ſive abſq; Symbolis exerceatur, adeò eſt exigua pars Analyticæ univerſalis, ut nullus ejus, neq; in Angulis, neq; in Circulis, neq; in Solidis uſus ſit, ſed ſolummodo in Parallelogrammis Rectangulis, & Triangulis Rectilineis. Etiam in his, hoc tantum præſtat, ut id quod in (illarum quas modo dixi Propoſitionum) verborum involucris continetur eruere valeamus. *Analyſis* enim *per poteſtates*, non procedit ab effectu ad cauſam, ſed ab una proprietate ad aliam, non (ut eſt natura cauſæ) priorem, ſed ab eadem cauſa genitam. Analytica ergo hæc res admodum anguſta eſt, quanquam ad Trigonometriam in rectis lineis exercendam non omnino inutilis; verùm ob magnam multitudinem Symbolorum, quibus hodie oneratur, unà cum falſa opinione quod plus valeat ipſa Methodus quam revera valet, pro peſte Geometriæ habenda eſt. Inde enim eſt quod inveſtigatio cauſarum (a qua ſola ſperari poteſt ſcientia) negligitur, nimirum, propter ſpem factam a

parum

parum acutè videntibus Magistris, posse per Arithmeticam speciosam nullum non Problema solvi; cum tamen Problemata, quæ veteres solvere non potuerunt, ad hunc usq; diem maneant insoluta. Jam si quid contra hæc dicendum habeas audiamus.

B. Nihil contrà dico. Etsi enim multi hac methodo in Ploblematis solidis usi sint, in eo tamen processus eorum semper desinit, ut pronuntient Problema, cujus constructionem quærunt per eam Geometriam quæ nunc extat, esse insolubile, atq; adeo opus esse ad constructionem ejus quibusdam aliis lineis quæ nulla Arte accuratè duci possunt.

A. Legamus ergo ulterius, [*partim etiam quod Arithmetices pomæria tam stricta fecerint, ut veris numeris* (*rationalibus* scil. *& quidem integris*) *coerceantur.*]

B. Prævideo hic quid reprehensurus es.

A. Quid?

B. Quod Arithmeticam versari putet circa aliud præter numeros. Nam qui numerus verus non est, omnino non est numerus.

A. Rectè. Sed & illud quoq; reprehensurus eram, quod explicet qui sint verè numeri per *Rationales & quidem integros*, nam numerus ad numerum irrationalis esse non potest, quoniam omnes metitur *unitas*. Quem ergo ille numerum non verum, & alii *surdum* dicunt, quantitas continua est, & pertinet, non ad Arithmeticam, sed ad Geometriam. Præterea non rectè à veris numeris distinguit Fractiones: quanquam enim solеant appellari Numeri Fracti, non tamen numerus frangitur, sed res in rerum numerum. Itaq; duæ unciæ non minùs numerus verus est, quam duo Asses. Desideratur ergo hic ἀκρίβεια illa quæ tam necessaria est Geometræ, quam intelligere & loqui Latinè Academico. Sed pergo [*Ut reapse ostendam etiam Geometrica Problemata* (*quatenus saltem a positione sive locali situ abstrahunt*) *a Principiis Arithmeticis vel maximè dependere. Et quidem eo usq; abesse, ut ad Problemata sive Theoremata purè Arithmetica statuminanda* (*quod tamen non raro factum video*) *Geometricæ plane demonstrationes sint huc forinsecus advocandæ, ut contra quæ Geometrica habebantur simplicius quidem & universalius ex purè Arithmeticis, adeoq; universalibus demonstranda videantur.*] Prætereo in gratiam tuam quod vox *abstrahunt* hoc in loco Scholasticum sit, Latinum non sit. Sed rogo te ubi probat id quod hic dicit?

B. Probabunt ipsius per totum hoc opus a Principiis Arithmeticis demonstratæ conclusiones Geometricæ.

A. Id ergo videbimus inferius. Interea verò mirari mihi liceat visum esse necessarium *Euclidi* numeros alios planos, alios solidos appellare, & tam multa de illis demonstrare. Numerus enim, neq; superficies est, ut possit propriè dici planus, neq; corpus, ut possit vocari, solidus. Sed forte *Euclides* numerum à divisione continui, & demonstrationes Arithmeticas.

meticas, a Geometricis, non contra (ut *Wallisius*) derivavit. Distulit ergo Theoremata Arithmetica ad Elementum septimum ut in illis demonstrandis imitaretur demonstrationes quasdam quæ sunt in Elementis Geometricis Antecedentibus. Itaq; noni Elem. propositiones 18^{a} & 19^{a} fundantur in 16^{a} & 17^{a} Elem. 6^{i} Item decem primæ propositiones Elem. 2^{i} in numeris demonstrari possunt, Sex posteriores non possunt propterea quod non omnes Lineæ sunt commensurabiles. Ostendat tibi *Wallisius*, si potest, duos numeros, quorum major ad minorem eandem habeat rationem quam majus segmentum Lineæ divisæ extrema & media ratione, ad segmentum minus; vel quam habet quadrati Diagonalis ad latus. Ipsum latus appellabit fortasse *numerum*, sed ut te fallat, non scribet *latus* sed *l*. vel *p*, vel aliud aliquod Symbolum. Coge igitur illum numeros suos eloqui. Dicit credo numerum alterum saltem esse surdum. *Surdum* autem est quod effabile non est. Jam si series proponatur numerorum ab unitate incipientium, & unitate crescentium infinita, nonne in illa serie numeros omnes contineri putares?

B. Certè.

A. Aut ullum eorum esse ineffabilem?

B. Nullum.

A. Nullus ergo numerus, surdus est. Sed pergamus. [*Quod autem vel Philologica vel etiam alia Philosophica Mathematicis immiscuerim; partim illud ad subjecti explicationem commodum videbatur, partim etiam condimenti loco*, &c.] Quid illud est quod apparat Condimenti Scientiæ per se jucundissimæ; An γελοτοποιὸν an γελοῖον acturus est?

B. Nihil minùs. Nam per Philologica ea intelligit quæ continentur in *Cap*.6. & quibusdam sequentibus de Etymologiis nominum numeralium Latinorum plena ingenii, qualia sunt, Latinorum vocem *unum* derivari a Græco ὃ ἕν; *duo* a δύο; *tres* a τρεῖς; *quatuor* a πίτορα, πίτορα a πίτορα, & hoc a τέσσαρα; *quinque* a πέντε, posito *quin* pro πεν & *quo* pro τε.

A. Unde hæc conjicit?

B. Nescio nisi a congruitate literarum.

A. Non est inter ὃ ἕν & *unum*, neq; inter *quatuor*, & τέσσαρα, neq; inter *quinq*; & πέντε magna affinitas literarum, & quilibet etiam puer tantundem conjicere potuit.

B. Deinde *Bellum* (inquit) *a* πόλεμος *fortasse dictum est*. An tantundem conjiceret etiam puer?

A. Minimè. Non est enim derivatio illa neq; vera, neq; verisimilis, sed ridicula condimenti causa.

B. *Exemplum* a *simili* derivari dicit, ideoq; non *exemplum* sed *exsemplum* debere scribi.

A. Quidni & *exsero* pro *exero*, & *exsisto* pro *existo*, & *exsuo* pro *exuo*,

&

& *exsequiæ* pro *exequiæ*, & similia multa scribi jubet, qualia nemo Latinorum unquam scripsit? Eadem enim est ratio in his, quæ in *Exemplum*. Credo sperasse illum novitate hac fore olim ut distingueretur ab indoctis hominibus hujus seculi. Sed errat: sicut enim nullius *exemplum* secutus est ille, ita nemo illius *exsemplum* est sequuturus. Sed quænam sunt ea quæ appellat *condimenta Philosophica*?

B. Nescio, nisi ea intelligat quæ disseruit de natura Mathematicæ, & de natura Demonstrationis.

A. Pergamus ergo ad reliqua Epistolæ Dedicatoriæ. Excusans se quod tardius prodierit liber ejus quam speraverat, [*Interea* (inquit) *temporis bis occurrebat castigandus Hobbius*; *Latinè primum*, *Elencho meo in ipsum edito*, *quo ipsius in Libro de Corpore* ἀγεωμετρησία *castigatur*, *& fastus reprimitur*; *deinde & Anglicè*, *ob scriptum ipsius Anglicanum conviciis fartum*, *quo scurram agit*, &c.]

B. Hoc habet mercedis ob Politicam suam (Leviathan.)

A. Fortasse *Wallisius* contra illum iratus scripsit, & tantò asperiùs, quantò liber ille Hominibus honestis magis placuit. Sed videamus an in hoc libro *Wallisii* nihil sit quod mereatur castigari.

A. Accedentibus jam ad ipsum opus Mathematicum, ubi orationi scientificæ debitam ἀκρίβειαν exigere non modo iniquum non est, sed etiam necessarium, quicquid non accuratissimè dictum, id liberum erit reprehendere. De rebus enim quarum scientia certa esse potest, idem est non accurate, & false dicere. Itaque qui propter inscitiam scribere vel disserere accurate nesciunt, quoties reprehenduntur, hac defensione uti solent, non esse litigandum de verbis, ubi res constat; cum tamen de veritate rei, nisi accuratissimis verbis constare non possit. Non moror ergo homines illos ambitiose graves, qui propriæ imperitiæ aliorum prætendunt λογομαχίαν. Quasi aut esset disputatio aliqua, quæ λογομαχία non esset, aut veritas aliqua, quæ non esset verborum veritas. In quocunq; igitur libro, de quacunq; scientia, hujusmodi verba inveneris, *mera est hæc* λογομαχία: *non placet*, *dum de re constet*, *de verbis litigare*, pro certo habeas scriptorem illum scientiæ quam tractat imperitum esse, ignorantiamq; suam gravitate (ut videtur ipsi) sententiolæ velle tegere. Nec molestum tibi sit, si quicquid, sive in dictionibus hujus authoris, sive ratiocinatione, ἀκρίβεια debita carere videro, notavero, eâ saltem lege, si quomodo eadem ἀκριβῶς enuntianda sunt, simul docuero.

B. Non iniquum postulas.

A. Præterea in Philologicis illis (ut vocat) condimentis, postulo ut liceat mihi conjecturis illius apponere conjecturas meas.

B. Neque hoc iniquum est.

A. Inscribitur Caput primum de *Mathesi* in genere, & de Objecto & Distri-

Distributione ejus. Videamus ergo quàm sit accuratum. [*Disciplinæ Mathematicæ dicuntur omnes illæ sive Artes, sive Scientiæ, quæ circa Quantitatem peculiari modo versantur, sive Continuam, sive Discretam.*] Tune Definitionem hanc censes esse accuratam?

B. Ego verò satis. Etsi vox illa *peculiari modo*, nisi ex sequentibus non facile intelligitur.

A. Expone ergo verba illa ex sequentibus.

B. Intelligit Quantitatem *peculiari modo*, id est, strictiore sensu, prout ad numerum & magnitudinem restringi solet.

A. At intelligi ita non possunt. Nam *versari circa Quantitatem, sive Continuam sive Discretam* (quæ eadem sunt cum Magnitudine & Numero) posita sunt in ipsa Definitione?

B. Minime. Nam in definitione per *Quantitatem continuam* intelligit solam quantitatem Corporum, nempe Lineam, Superficiem, & Solidum, exclusa quantitate Temporis, Loci, Motus, & Ponderis. Per *Quantitatem* autem *discretam* (exclusa Oratione) solum Numerum, propterea quod Tempus, Locus, Motus, Pondus, *vix ullam* (inquit) *subeunt speculationem Mathematicam, nisi ad modum vel Magni, vel Multi considerantur.*

A. Videtur sane non bene intelligere *Wallisius*, quid sit ipsa quantitas. Neque id mirum est, cum nemo Geometrarum illorum, qui ante ipsum fuerunt, tradiderit quantitatis Definitionem; ipse autem examinatione nulla, sed tantum lectione, suam fecerit Geometriam alienam.

B. Quomodo autem quantitatem definis tu?

A. *Quantitas est per quam quærenti de qualibet re quanta sit, apte respondetur; sive* (quod idem est) *per quam cujuslibet rei magnitudo determinatur.* Verbi causâ, longitudine propositâ, quæro quanta ea sit. An responderi aptè putas *longitudinem esse*, An potius quod sit tanta, quanta est *Ulna*, vel quanta est aliqua alia mensura vel mensuræ; vel quod sit ad longitudinem expositam in hac vel illa ratione? Similiter si quæstio fiat de superficie, vel solido, non apte respondebitur, nisi per mensuram aliquam vel comparationem cum aliquo mensurato. Alioqui quærentis animus nihil habet (in quo acquiescat) determinatum. Non sunt ergo longitudo, superficies, solidum, *Quantitates* ipsæ, sed *Quanta*, vel potius sine scholarum etiam antiquarum barbarismo, *Tanta*.

B. Nihil video propter quod hæc non sint accurate dicta. Sed quid inde infers?

A. Istuc infero, Tempus, Locum, Motum, Pondus, non minus proprie quantitates dici, quam Linea, Superficies, & Solidum. Cum enim neq; hæc neq; illa quantitates sint, sed quanta, æque sunt utraq; quantitates. Cumq; tam illa quam hæc quantitatem habeant, sunt æque utraq; quanta. Quare in Definitione hac Matheseos universalis, nihil

est

est neq; ἀκριβὲς neq; ὑγιές. Multa habet *Archimedes* in Libris suis per Motum, & Tempus demonstrata, quæ tamen ne *Wallisius* quidem ipse credo negabit esse & bene demonstrata & pure Mathematica.

B. Quid *Wallisius* negaturus sit nescio. Sed Tempus, Locus, *&c.* mihi quidem videntur Quantitates non minus proprie dictæ, quam Magnitudo, & Numerus; nec quantitas a Magnitudine aliter distingui, nisi quod per quantitatem intelligimus determinate Tantum; Magnitudo autem vox sit indefinita. Video item alteram post adhibitam mensuram, comparationemq; cum alio actu semper dici; alteram non semper. Sed desidero adhuc Definitionem *Mensuræ.* Mirandum enim esset, si qui Geometriæ (quam sine mensuratione assequi nemo potest) prima Principia posuit *Mensuram* nusquam definisset.

A. Definitio *Partis* (*subaudi aliquotæ*) tradita ab *Euclide* initio Elementi quinti paucis mutatis erit Definitio *Mensuræ.* Est enim *Mensura Magnitudo una alterius, quando ipsa vel ipsius multipla alteri applicata cum ea coincidit.*

B. Definitio hæc fere eadem est cum Axiom. 8. El. 1. *Euclidis.* Nam videmus quotidie omne genus rerum per ἐφάρμοσιν mensurari. Sed plerumq; repetitam.

A. Definitio ergo hæc, cum sit mensurationis quotidianæ descriptio accurata, ipsa quoq;. Definitio accurata est. Quænam autem sunt quantitates illæ quas *discretas* vocat?

B. Numerum & Orationem.

A. Scio. Sed quid significat vox ea *discreta?*

B. Ponitur hoc loco pro *interrupta*, sive *intercisa.* Exempli causa, *Euclides* in prioribus quidem sex Elementis Diagrammata ex lineis constant perpetuis, sive continue ductis, quibus exponitur lectori quantitas continua; deinde in tribus Elementis sequentibus lineis usus est punctim designatis, sive lineis intercisis, ut exponeret quantitatem *numeri.*

B. Videtur ergo *Euclidi* origo Numeri consistere in divisione Integri continui.

A. Certissimè.

B. Sed *Wallisio*, contra, ex compositione *Unorum.*

A. Quanquam is qui primus numeravit, utrum corpus corpori apposuit, an in corpora divisit, nihil referat; posterius tamen verisimilius est, nisi putem illum, hominem unum vocasse, *unum*, deinde unum hominem & unam arborem *duo*, item unum hominem, & unam arborem, & unum montem, *tres*, & sic deinceps. Numerus enim absolute dictus supponit in Mathematicis unitates ex quibus constituitur inter se æquales, æqualitatem autem unitatum in quantitate oriri, nisi a divisione integri continui in partes æquales, vix potest cogitari. Utut tamen

 hoc

hoc sit, nisi numerus consideretur ut sic ortus, Scientia Arithmetica fere periit. Nam ex additione unitatum Theoremata Arithmetica valde pauca, ex divisione continui omnia possunt demonstrari. Deinde *Oratio*, cur ponitur (primò) inter quantitates? An quia Oratio una quam alia longior esse potest? Quare ergo non potius ponitur inter quantitates Genus ejus, nempe Sonus, Nam & sonorum alius est longior, alius brevior. Cur non sunt etiam latratus, rugitus, mugitus quantitates, & quidem discretæ? Deinde cur est *Oratio discreta quantitas.* An quia dividitur in verba? Si ita sit, quidni sonus tubæ dicetur quantitas continua?

B. Orationem esse *Quantitatem*, & quidem *discretam* dicit *Aristoteles*.

A. Credo. At non nunc quærimus quid sit *Aristotelicum*, sed quid sit τὸ ἀκριβές. [*Tempus tractat Astronomia.*] Tractat quidem, sed an ut Tempus? Proprietatemne *Temporis* ullam demonstrant Astronomi? Ut loquerentur de *Tempore* necessarium erat propter *Motum*. Annum, Mensem, Diem, Horas, & Horarum minuta prima, secunda, &c. Definiunt Astronomi, non ad *Temporis* Proprietates, sed Partes cognoscendas, quæ motu corporum Cœlestium distinguuntur. [*Item Chronologia.*] Chronologia historiæ quidem, sed non scientiæ pars est. [*Locus autem in Steriometria quantum ad ejus capacitatem.*] Quid quæso interest inter *loci capacitatem*, & *loci magnitudinem*?

B. Planè nescio.

A. Sed verebatur, puto, ne si dixisset Magnitudinem, etiam *Locum* ad quantitatem proprie dictam, quem antè inde expulerat, videretur reduxisse. [*Orationem tractat Musica.*] An ut *Orationem*, an ut Sonum? Ut sonum certe (qualis est Musica hodierna,) quanquam hoc fortasse rectius dixit quam sensit. Nam antiquitùs tum verba tum Modos componere ejusdem erat Artis Musicæ. [*Motus autem & Pondus in Mechanicis præsertim considerantur.*] Quid? An Mechanici opus esse putat demonstrare? vel Motus & Ponderis nullas esse proprias passiones quæ demonstrari possunt. Quis nescit omnia quæ rectè facit Mechanicus fieri ex præscripto & secundùm regulis Mathematicorum? Mathematici ergo est ut aliarum quantitatum, ita etiam Motuum & Ponderum rationes demonstrare. Vides igitur quam crassa hæc sunt *Wallisii* Professoris, & ab ἀκριβείᾳ ἐπιστημονικῇ aliena. Sed Doctrinam Rationum omnem fatetur considerationis esse vel Arithmeticæ, vel Geometricæ; neque nescit credo ipsis Rationibus suas esse certas quantitates: nam una Ratio major alia vel minor esse potest. Est ergo Ratio quantitas propriè dicta, etiam ex Doctrina illius. Respondeat mihi jam, utrum numerus sit Ratio; Negabit puto. Qui fit ergo ut tractetur in Arithmeticâ, & solâ

lâ quidem, ut ille vult? Rursus utrum Ratio sit Linea, vel superficies vel solidum? nihil horum; vel quantitas continua, vel discreta? neutram dicet. Qui fit ergo ut tractetur in purè Mathematicis?

B. Si Ratio, neq; continua quantitas, neq; discreta sit, non videtur saltem mihi, omnino esse quantitas.

A. Quid ita? Si quis quantitatem omnem *continuam* vel *non continuam* esse diceret, necessarium faceret ut omnis quantitas alterutra earum esset. Sed non idem sequitur ex divisione in *continuam*, & *discretam*. Itaque ut Rationem ad aliquod quantitatum genus referam, quantitas dividenda est in absolutam & Relativam. Absoluta est Longitudinis; Superficiei, Solidi, Temporis, Motus, per se considerata quantitas. Relativa est, qua determinatur quanta sit quælibet dictarum Magnitudinum ut comparata cum alia ejusdem generis. Deinde absoluta quantitas alia est corporum, ut Longitudo corporis. Alia Temporis, ut Longitudo Temporis. Alia Motus, ut Velocitas & Pondus. Item Rationum alia est Geometrica, alia Arithmetica.

B. In quo ergo genere, ponis Rationem Numeri ad Numerum?

A. Rationem tam Geometricam quam Arithmeticam divido in Rationem rei ad rem, & Rationem rerum ad res; Putasne in ullo alio quantitatum genere collocari oportere Rationem duarum ulnarum ad duos palmos, quam in qua collocatur ratio unius ulnæ ad palmum unum? Aut Rationem plurium ad plura aliam esse speciem Rationis quam unius ad unum? Aut aliam quidem esse speciem quantitatis tres ulnas, aliam autem unam ulnam? Aut denique Rationem unius ulnæ ad tres ulnas, non eandem esse quam habet unum ad tria;

B. Sunt quidem hæc ita manifesta, ut mirandum sit *Aristotelem* Quantitatem discretam nominâsse. Est enim Ratio numeri ad numerum nihil aliud quàm Ratio partium aliquotarum quantitatis continuæ ad quantitatis continuæ partes aliquotas, (& inter se & illis) æquales. Itaque (ut more meo cum Aristotelicis loquar) sicut calor a calido abstrahit, ita numerus abstrahit ab inæqualitate partium, dum considerantur partes non aliter quam quatenus plures.

A. Rectè. Sed discedis jam a libris.

B. Quidni?

A. Procedamus ad alia [*Quamquam autem hæc omnia in disciplinis Mathematicis tractentur, non tamen per se & primario; sed quatenus vel Mensurantur vel Numerantur.*

 B. Ne-

B. Ne mihi quidem hoc placet, propterea quod Geometriam ipse definit inferiùs scientiam esse magnitudinis quatenus est mensurabilis, & Arithmeticam scientiam esse Numeri, quatenus numerabilis. Itaque Magnitudo & Numerus non meliore jure, ex illius sententia quantitates sunt propriè dictæ, quàm illæ alteræ Locus, Tempus, Motus, *&c.*

A. Vides ergo necessitatem circa scientias loquendi ubique ἀκριβῶς. Nam qui ita non fecerint, obliti eorum quæ scripserant, neque habentes ipsi Ideas rerum cogentur sibimetipsis turpiter contradicere.

B. Da quæso scientiæ, quam appellant Mathematicam, Definitionem aliquam accuratam.

A. Mox faciam. Legamus interea rationem ipsius nominis *Mathematicæ* apud *Wallisium*; & quare videtur illi, impositum esse solis Geometriæ & Arithmeticæ. [*Si de Mathematum sive Matheseos nomine quæratur, cur hac appellatione insigniantur illæ Disciplinæ, ideo fortasse fuit, quoniam Mathemata apud multos quidem sola, apud alios Antiquorum primo ante alias disciplinas loco ediscebantur; adeoque καθ' ἐξοχὴν μαθήματα dicta, quia πρωτομάθητα.* Quoniam hæc ait *fortasse ita esse*, nos quoque *fortasse* aliter esse non minùs probabiliter affirmare possumus. Fortasse ergo fuit quod veritas Theorematum circa Magnitudines tantum et Numeros antiquitùs docebatur, & propterea a Magistris discipuli eam ἔμαθον, id est didicerunt, intellexerunt, perceperunt, id quod sine summa evidentia facere non potuerunt. De aliis rebus sine Principiis manifestis, & sine accurata ratiocinatione, in porticibus & ambulacris a sedentibus ambulantibusve Scholasticè, id est, στοχαστικῶς disserebatur, quemadmodum nos nunc disserimus per *fortasse.* Et quidem si propter hoc dicebantur Mathematica, non est difficile universaliter definire quid sit Mathesis. Est enim Mathesis *cognitio veritatis per demonstrationem.*

B. Scientiæ ergo juxta tuam definitionem sunt omnes Mathematicæ. Cur ergo Græci non omnes scientias sic vocabant?

A. Annon omnes sic vocabant, quæ traditæ erant demonstrativè? Nam quæ Theoremata demonstrata habuerunt Græci veteres præterquam circa quantitatem?

B. Puto nulla.

A. Vides ergo causam cur illæ scientiæ, quarum subjectum est quantitas solæ habitæ sunt ab Antiquis Mathematicæ, & sic appellantur etiam hodiè. Itaque si illo tempore doctrinæ, Moralis & Civilis, fuissent demonstratæ, cur non credam & illas pro Mathematicis haberi potuisse? Non enim subjectum, sed demonstrationes faciunt Mathematicam.

thematicam. Transit jam ad scientiarum Mathematicarum species. [*Sunt autem disciplinæ Mathematicæ aliæ Puræ, aliæ Mixtæ. Puras dicimus illas quæ Quantitatem absolutè consideratam tractant, prout a materia abstrahitur. Mixtas autem illas appellamus in quibus præter considerationem Quantitatis (sive multitudo illa fuerit, sive magnitudo) etiam subjectum cui inest connotatur.* Hæccine tibi videntur dicta esse accuratè?

B. Ita.

A. An non qui quantitatem considerat, considerat eam prout abstrahitur a materia? An vox *Quantitas* abstracta non est a concreta voce *Quantum?* Quænam autem est ea scientia quæ non modo quantitatem considerat, sed etiam subjectam ejus? Quasi subjectum non consideraretur tunc, quando considerantur ejus accidentia. Cujus quæso scientiæ subjectum est, sine Accidentibus consideratum corpus?

B. Nullius. Neque dicit ille subjectum cum quantitate sua *considerari, sed connotari.*

A. Si connotari non sit considerari, qui fit ut solâ quantitate consideratâ scientia appelletur Mixta? Video eum nihil hic videre. Scribit quæ didicit puer. Scientia enim quemadmodum subjectum ejus (nempe mundus) non dividitur (per *puram* & *mixtam*) in Species, sed in partes, eo modo qui dicetur infrà, postquàm legerim hujus Capitis reliqua. [*Verbi gratia, ubi in Arithmetica traditur* bis duo quatuor efficere, *numeri hic seorsim considerantur, & abstractim ab omni materia subjecta.*] Vide quæso hominis negligentiam doceri dicentis in Arithmetica *bis duo efficere quatuor.* Si doceatur hoc in Arithmetica, etiam in Arithmetica demonstratur. Quis hoc unquam demonstravit aut demonstrare conatus est, aut ex Principiis Arithmeticorum nunc positis demonstrare potest? Ne assumitur quidem ut *Communis notio*, neque ut *Petitio*, sed a pueris domo affertur. [*In aliis secus est. verbi gratia, cum docet Astronomia Æquatorem & Zodiacum se mutuò in binis punctis secare,*] Astronomia illud non docet, neque opus proprium Astronomi est illud demonstrare, sed Geometræ. Observat Astronomus duos solis motus, Diurnum & Annuum, in duobus fieri circulis maximis, deinde, ut Geometra, investigat quem faciunt Angulum. Itaque omnia fere Theoremata Astronomorum demonstrata sunt a *Theodosio*, *Menelao*, aliisque Geometris, qui scripserunt de sphæra. [*Est enim Arithmetices subjectum purius quiddam & magis abstractum quam subjectum Geometriæ.*] Neque verum est hoc, neque rationem propter quam verum sit, aut is aut alius quisquam unquam attulit. Deinde Longimetriam, Planimetriam,

am, & Stereometriam numerat inter Mathematicas Mixtas; cum tamen Longitudo, Superficies, & Solidum sint per suam ipsius distributionem Geometriæ puræ subjectum adæquatum. [*Neque interim Mechanices & Architectonices obliviscendum est. Quarum utraque (præsertim Mechanica) Geometricas Mensuras ita ad molem corpoream applicat, ut & interim Ponderum & Virium Metricium rationem habeat.*] Rursus Mechanicam annumerat scientiis, quasi Mechanici esset demonstrare. Mirum ni & Calceamentaria Mathematicis Mixtis annumeranda sit, quia metitur pedem.

B. Antequam transeas ad Cap. 2^m præsta quod promisisti scientiarum distributionem & singularum Definitiones accuratas.

A. Cum scientiæ nec sine ratiocinatione acquirantur, neque in ratiocinatione locum habeant voces ambiguæ, quales sunt Metaphoræ, & totum Troporum genus, antequam accingamur ad ratiocinationis opus, nempe scientias, discamus oportet accurate loqui, id est, præfinitò loqui.

B. Quid illud est præfinitò loqui?

A. Præfinitò loqui, est vocabulis uti *prædefinitis*, præsertim illis ex quibus constare debent conclusiones demonstrandæ. Sunt enim Definitiones Principia scientiarum sive propositiones in demonstratione omnium primæ, quæ nisi accuratæ sint, quæ sequuturæ sunt omnes incertæ erunt. Accuratè autem definire, dependet ab intellectu Vocum, ab observatione quomodo significationes earum pro diversitate circumstantiarum variantur, & quid sit quod in omni illa significationum varietate est commune; nam id quod per vocabulum aliquod ubique intelligitur, illud est significatio ejus accurata. Quod si necessarium aliquando fuerit, ut vocabulo utamur novo, facile est illud definire, id est, quid nos verbo nostro intelligi volumus explicare. Itaque hoc recte facere ante omnes scientias discendum est. Et hæc quidem sive Peritia, sive Prudentia recte definiendi, quæ acquiritur experientia circa verborum usum, vocatur *Philosophia Prima.*

B. Supponamus autem hominem ratiocinari accurate jam posse. Quæro quot sunt scientiæ, & quomodo per Definitiones proprias aliæ ab aliis distinguuntur?

A. Una est omnium rerum scientia universalis, quæ appellatur Philosophia, quam sic definio. Philosophia *est Accidentium quæ apparent, ex cognitis eorum Generationibus; & rursus ex cognitis Accidentibus, Generationum (quæ esse possunt) per rectam ratiocinationem cognitio acquisita.* Quærunt enim Philosophi omnes circa rem cognitam, vel quid ab ea produci potest, vel unde ipsa produci potuit. Quot sunt ergo rerum species tot sunt Philosophiæ totius partes sive scientiæ particulares.

B. Sed

B. Sed qua Methodo distinguendæ sunt?

A. Eadem qua distinguuntur ipsa Phænomena sive accidentia quæ apparent, nimirum, incipiendo à maxime communibus.

B. Quæ sunt illa?

A. *Magnitudo* & *Motus*. Et quoniam hæc in omni corporum actione effectum partim producunt, ut Motus, partim augent vel minuunt ut Magnitudo, prout major est vel minor, scientia in qua determinantur magnitudines, tum Corporum, tum Motuum primo loco ponenda est. Nam primo loco discenda est, quippe quod sine illa cæteræ acquiri non possunt.

B. Scientia hæc quomodo appellatur?

A. *Geometria*.

B. Defini Geometriam.

A. *Geometria est scientia determinandi Magnitudines.*

B. Breviter quidem satis, sed parum perspicuè. Non enim intelligo quid sit *Magnitudinem determinare*.

A. Magnitudinem determinare idem est quod ostendere quanta sit.

B. Quomodo autem ostenditur vel cognoscitur Magnitudo exposita quanta sit?

A. Comparando eam cum Magnitudine alia mensurata, vel quæ habeat ad mensuratam rationem cognitam. Itaque Geometria definiri potest sic, *Geometria est scientia per quam cognoscimus Magnitudinum inter se rationes*. Sed quoniam eæ cognosci non possunt, nisi exposita sit quantitas aliqua per mensuram cognita, juxta quam cæteræ possunt æstimari, Definitio Geometriæ clarior erit, si sic dicamus, *Geometria est scientia determinandi Magnitudinem, sive Corporis, sive Temporis, sive rei cujuslibet non mensuratæ, per comparationem ejus cum alia vel aliis Magnitudinibus mensuratis.*

B. Exquisitè hoc. Et quoniam Magnitudo continua quælibet data dividi potest in partes quotlibet aliquotas (ratione ejus ad quamlibet aliam non mutata) manifestum est Arithmeticam in Geometria contineri. Sed cupio etiam definitionem audire Arithmeticæ seorsim a Geometria.

A. *Arithmetica est scientia determinandi multitudinem rerum non numeratarum, per comparationem cum numerata vel numeratis.* Itaque qui de quantitate loquens continua, Geometra est, idem de eadem loquens quantitate, ut divisa in partes aliquotas, est Arithmeticus.

B. Assentior. Progredere ad alia.

A. Proximo loco poni oporteret *Physica Universi* (siquidem ab homine acquiri posset) qua determinaretur Magnitudo & Motus universi tanquam corporis unius, & quæcunque inde consequuntur. Tertio loco succedit scientia qua determinantur corporum Cœlestium visibilium (id est stellarum tum fixarum, tum Planetarum, comprehenso etiam Globo Telluris) & Motuum, quibus eorum unumquodque fertur Magnitudines; appellaturque Astronomia. Quarto scientia qua Motus corporum invisibilium determinantur, a quibus Calor, Frigus, Lumen, cæteræque qualitates generantur, & operationes non visæ, gradusque earum fiunt. Vocatur autem *Physica.* Deinde ad Astrorum partes venientes (id est ad partes Globi Terrestris (nam Astrorum sublimium partes non satis percipimus) infinitæ statim apparent rerum sublunarium species, quarum Magnitudines, Motus, actionesque considerandæ sunt; harum autem scientiarum nomina vel ab ipsis subjectis, vel ab eminentibus subjectorum qualitatibus derivari solent; ut quæ de Plantis tractat, *Phytologia*; de Corporibus Animalium, *Anatomica*; de visione *Optica*; de Ratiocinatione, *Logica*; de Moribus humanis, *Ethica*, de Civitate, *Politica*, &c.

B. Si tantam speculandi materiam præstet unica species Homo, quando putas otium nobis fore comtemplandi cæteras? Transeamus jam, si volueris, ad Cap. 2^m^.

A. [*De Geometria, & Arithmetica speciatim; Earum Definitiones, Objecta, Principia, & Affectiones; easque verè scientias esse.*]

B. Accuratior forte erit hic quam in præcedentibus.

A. Non puto. Geometriæ & Arithmeticæ duplices affert Definitiones, alteras ab objecto, alteras a Fine. [*Priori modo definitur Geometria, Scientia Magnitudinis quatenus Mensurabilis:*]

B. Non accurate hoc? In Definitionibus enim Aristotelicis signum esse solet summæ ἀκριβείας vox illa *quatenus.* Nam accuratam Definitionem juxta *Aristotelem* dictum esse oportet non modo *De omni* & *Per se*, sed etiam *quatenus* ipsum.

A. Recte id quidem *Aristoteles*, non tamen in omni Definitione ea voce utitur. Subjectum *Physicæ* dicit *Aristoteles* esse *Corpus mobile, quatenus mobile.* Vides *Corpus mobile*, significare subjectum ipsum. In eo autem considerari possunt multa quæ Physicus non considerat. Itaque ut opus Physici in sola mobilitate determinaret *Aristoteles*, adjecit illud *quatenus mobile.* Sin dixisset,

Physicam

Physicam scientiam esse in qua demonstrantur affectiones Corporis . ◆ *entes ex ejus mobilitate*, non puto adjecisset *quatenus mobile*. Sic *Wallisius* potuit dixisse, *Geometria est scientia Magni, quatenus mensurabilis*, sed non *Magnitudinis quatenus mensurabilis*; propterea quod in corpore quidem sive magno sive parvo sunt alia multa, quæ considerari possunt præterquam quod sit *mensurabile*; in magnitudine autem nihil. Deinde illud, scientia *magnitudinis*, sive etiam *magni*, tantum abest ab ἀκρίβεια, ut sit absurdum. Quid quæso est *scire magnitudinem*, vel *scire magnum*? Præter alicujus dicti veritatem nihil sciri dicitur, itaq; nisi *Magnum*, sit *Propositio*, sciri non potest.

B. Quomodo definit Arithmeticam?

A. [*Arithmeticam vero esse scientiam numeri quatenus numerabilis.*]

B. Eadem sunt & hîc vitia.

A. [*Posteriori vero modo, Geometriam dico scientiam bene mensurandi, Arithmeticam autem scientiam bene numerandi.*] Quid est mensurare?

B. Mensuram definiisti supra, describens id quod faciunt qui aliquid mensurant, nimirum *mensuram esse applicationem*, &c. Itaque mensurare est applicare mensuram ad magnitudinem mensurandam, quoties fieri potest, ut mensuræ ad mensuratum ratio ad sensum exponatur. Itaq; corpora consistentia quidem per *lineas*, Liquida autem & quæ fluida sunt per *vasa* mensurari solent.

A. Nonne ergo bene mensurare, sciunt quæ mensuras mensurandis bene προσαρμόζειν, id est applicare sciunt? Omnes ergo homines, per definitionem hanc *Wallisii*, sunt (non minus quam ipse) Geometræ; ut etiam omnes, qui multitudinem quam vident numerare possunt sunt (ut ille) Arithmetici.

B. Sed per *mensurabilitatem* & *numerabilitatem* intelligere se dicit *quicquid ad eorum singulas affectiones & habitudines investigandas & intelligendas attinet.*

A. Itaque per *mensurare* & *numerare* intelligit *demonstrare*. Voluit certe idem quod est in definitione mea, *quicquid magnitudinem determinat, sive facit cognitam*; Sed quia illud non intellexerat, eloqui non potuit. [*Quod illas autem scientias dixerim, non est cur quisquam miretur*, &c. *Habent enim Subjecta, Principia, & Affectiones*, *easque de Subjectis, demonstrationibus maximè scientificis demonstratas.*] Vera quidem, nesciente illo, est consequentia; at si vox *Principia* id significat quod vult ipse, vera non est. Habet certe Geometria Principia sua, nempe Puncti, Lineæ, Superficiei, Solidi, Anguli, Figuræ, *&c.* definitiones; & præterea Axiomata per se ma-

nifesta, & Petitiones quasdam non iniquas. Hæc sunt Principia Geometriæ. Per hæc demonstrantur subjecti quanti affectiones. Ille autem hæc non intelligit, neque Principia ipsa, aut quomodo conducant ad demonstrationem. Audi quid dicit de Principiis [*Principia quod attinet, Punctum quidem est Principium magnitudinis, Unitas autem Numeri, ut vulgò perhibetur. Nam ex fluxu Puncti Linea, ex fluxu Lineæ, Superficies, Superficiei verò corpus oriri traditur. Item ex Unitatibus numeros fieri satis liquet.* Vide n' quam paucis verbis quantam suam indicavit ignorantiam? Probandum susceperat Geometriam Arithmeticam vere scientiam esse. Medium probandi assumit *quod subjecta habeant & Principia & Affectiones de subjecto demonstratas.* Assumpti partem unam nempe quod habeant Principia sic probat, *Punctum quidem magnitudinis, unitas autem numeri Principium vulgo perhibetur.* Censen' tu Geometram esse, qui quod probare debuit, ab authoritate probat vulgi?

B. Peccatum fateor est, nec parvum.

A. Demus autem ei satis hoc demonstratum esse. An Geometram esse dices, qui cum Geometriam & Arithmeticam Principia habere ostendere deberet, ex eo probat quod Punctum est Principium Magnitudinis, & Unitas Numeri? Intelligisne quomodo Punctum Principium esse potest Geometriæ?

B. Nullo modo.

A. Aut unitas Arithmeticæ?

B. Tantundem.

A. Aut eandem rem esse Magnitudinem & Geometriam? Aut Numerum & Arithmeticam?

B. Æquè.

A. Aut Puncti definitionem & Punctum ipsum esse idem?

B. Quid tu hæc tam absurda a me quæris?

A. Quid? nisi ut mihi dicas sicubi Argumenti hujus vim latere sentias.

B. Dicam quod sentio; nempe fraudi illi fuisse, quod cum vox *Punctum* Principium sit libri Elementorum Geometriæ *Euclidis*, habuit ipsum pro Principio Geometriæ, pariterque, quia vox *Unitas* prima est in Libris ejusdem Arithmeticis, putavit Unitatem Principium esse scientiæ Arithmeticæ. Miror sane hominem Peripateticum adeo oblitum fuisse *Aristotelis* sui, ut non meminerit Principia alia esse (ut nos loquimur) *essendi*, alia *cognoscendi.*

A. Pronum est oblivisci quæ non intelligas.

B. Est in his illius verbis quod non minùs reprehenderem quam ea quæ tu (quanquam in Geometriæ Professore turpissima) modo reprehendisti.

A. Quid

A. Quid illud est?

B. [*Oriri Lineam ex fluxu Puncti traditum est non inepte.*]

A. Recte id dicit.

B, An Punctum fluit.

A. Quidni?

B. Movetur ergo.

A. Verum dicis.

B. *Aristotelis* est, nihil moveri præter corpus.

A. Verum hoc quoque. Non enim Puncti nulla est quantitas, sed nulla computatur. Nec ipsum Punctum Nihil, aut Indivisibile est, sed Indivisum. Itaque qui dicunt Tellurem esse Punctum non improprie loquuntur, quoties de ea agitur (ut in Astronomia) describente Lineam Motûs Annui. Neque Lineæ Latitudo nulla est, sed nulla consideratur in demonstratione. Alioqui impossibile esset (quod postulat *Euclides*) Lineam ducere; & per consequens tota periret *Euclidis* Geometria.

B. Recte. Negato enim quod possit duci Linea, neque in illius Elementis, neque in quocunque alio Libro Geometrico quicquam extat Demonstrati. Esto ergo verum quod hic dicit. Certus tamen sum aliter sensisse ipsum, cum *Elenchum* scriberet contra *Hobbium* eadem dicentem, quæ nunc dicis tu, quem ob idipsum convitiis onerat.

A. Tanto est nequior. Sed pergamus. [*Non minus recte tamen, me judice, diceretur, si Magnitudinis Principium diceremus (prout hic loci Principii vox videtur intelligenda) ipsam extensionem, seu partium extra partes positionem.*] Quot rursus sunt hîc imperitè dicta! Primo, per vocem illam *videtur*, nescire se innuit quomodo vox Principium sit hoc loco intelligenda, quam ipse hoc loco posuit; nimirum fatetur se non intelligere quæ ipse scribit. Secundo, cum ex Professo loquatur de Principiis Geometriæ & Arithmeticæ, id est, de Principiis Scientiarum, id est, de Principiis cognoscendi, Principia tamen quærit Magnitudinis & Numeri. Tertiò. Principium Magnitudinis *Extensionem* esse dicit, id est, *Magnitudinis Principium* esse *Magnitudinem*. Quid enim aliud est Extensio (prout is ea voce hic barbarè utitur præter Magnitudinem? Extensio proprie loquendo, actio est illius qui aliquid ex curvo rectum facit. Ille autem *positionem* esse dicit *partium extra partes*. Quamobrem? Nimirum ut salva sibi sit opinio sua *Apopatetica*, quod idem Magnitudine corpus, locum modo majorem, modo minorem occupare possit.

B. Fortasse; nam in *Elencho* suo *Hobbium*, qui aliter sentit strenuè vituperat.

A. Quartò, cum dixisset ante, opinionem eorum qui Magnitudi-

nis Principium dicunt esse Punctum, non ineptam esse, addit *non minus rectè diceretur*, &c. quasi utraq; posset esse vera, sed pergamus. [*Numeri Principium duceremus ab ea modificatione qua quid unum multa dicimus.*] Primò, quid est illud quod *appellat rerum modificationem?* Aut quid aliud hic dicit quam quod res ita modificantur, ut *res una* sit *unum*, & Multæ Multa. Accurate. Deinde *prout ab indentitate oritur Unitas, ita & a rerum diversitate oritur Numerus.* Doctè. Scilicet *idem* est *unum*, *diversa multa.* Sed nonne & diversum est unum? Quid ergo id quod recte, cum vulgo ante dixerat, Numeri Principium esse unitatem, nunc mutat? [*Sed & ipsa unitas non incommode Numerorum Catalogo accenseri possit.*] Quomodo non incommodè, nisi & verè? Sed quare non incommode? Quia [*numerus de omni illo dicitur quo quæstioni* Quot sunt *affirmative respondetur.*] & quia [*Arithmetica eodem modo & unitatem & cæteros numeros tractat.*] Multa habet Theoremata *Euclides* de Numeris post Unitatem certa ratione procedentibus, de unitate nullum. Neq; quidem Numeris primis accenset Unitatem. [*Et quidem apud Grammaticos* Numerus singularis *sine solæscimo dicitur.*] Quamquam in hac quæstione, Grammaticorum authoritas non multùm valere debeat, non tamen ideò dicunt Numerum singularem, quod credant Unitatem esse Numerum, sed quod in Numero quidem singulari Flexionem ponant Nominis quod significat rem unam, in Plurali autem, Nominis quod significat res plures.

B. ἀκριβῶς. sequitur Cap. 3^{m} de Demonstratione.

A. [*Demonstratio est Syllogismus qui affectiones proprias de subjecto per proprias causas demonstrat.*] Intelligisne per Definitionem hanc quid sit Demonstratio?

B. Quidni?

A. Intellexti ergo quid significat vox *demonstrat.* Unde autem, si nesciebas quid esset Demonstratio?

B. Rectè dicis. Nam sciebam antè, ex Definitione *Aristotelica*, quam & ipse apposuit, nempe hanc, Ἀπόδειξίς ἐστι συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς ἐξ ἀληθῶν, καὶ πρώτων, καὶ ἀμέσων, καὶ γνωριμοτέρων, καὶ προτέρων, καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος, quam ille redidit breviorem.

A. An Definitionem *Hominis Aristotelicam* breviorem facere dicendus erit, qui in ejus locum hanc substituerit (Definitum ponens in Definitione) *Homo est Homo*; quemadmodum *Wallisius* ponit *Demonstrare* in Definitione *Demonstrationis.*

B. Video nunc Definitionem *Wallianam* vitiosam esse. Sed illa *Aristotelica* nonne bona est?

A. Melior quidem, sed non accurata. Nam etsi fieri possit, ut Demonstratio ex unico constet Syllogismo id tamen rarissimum est.

Debuit

Debuit ergo dicere συλλογισμὸς, ἢ συλλογισμοὶ, Deinde illud καὶ προτέρων, abundat; nam ante dixerat καὶ πρώτων, Tertio illud καὶ αἰτίων. τοῦ συμπεράσματος proprium non est Syllogismi demonstrativi, sed omnium Syllogismorum commune, etiam eorum in quibus tam major quam minor propositio est falsa. Exempli causa, Syllogismus legitimus est, *Omnis homo est lapis, Omnis lapis est animal, ergo Omnis Homo est animal.* Vides hic conclusionem, necessario sequi ex Præmissis, & propterea Præmissas falsas causas esse posse Conclusionis, ut tamen Syllogismi tales non sint Demonstrationes. Postremò Demonstratio omnis procedit ab ipsius affectionis demonstrandæ causa; ut si ab eo quod Terra interposita sit inter Solem & Lunam (exemplo utor Aristotelico) Eclipsin fieri Lunæ Demonstraretur, Interpositio Terræ non est conclusionis causa, sed Eclipseως. Fallit interdum *Vox* pro *Re se* ingerens.

B. Quænam autem est Demonstrationis Definitio accurata?

A. Demonstratio est Syllogismus, vel Syllogismorum series a Nominum Definitionibus usq; ad Conclusionem ultimam derivata.

B. Quid, Si Syllogismorum aliquis, vel Definitio aliqua vitiosa sit?

A. Neque Syllogismus est qui vitiosus est, neq; Definitio quæ vitiosa.

B. Quid si Conclusio sequatur (sine Definitione) Axiomata. An non erit Demonstratio?

A. Erit, modo Axiomata illa tum manifesta sint, tum etiam demonstrari (si imperetur) possint; qualia sunt Axiomata sumpta ab *Euclide*.

B. Sed ipsa *Definitio* quomodo definitur.

A. Definitio nonne Propositio est?

B. Est.

A. Nonne etiam est explicativa Nominis Definiti?

B. Etiam.

A. Quomodo explicatur nomen quodvis, verbi gratia, Nomen *Homo?*

B. Si ponatur vox *Homo* pro subjecto Propositionis, deinde pro Prædicato, Nomen quod sit aggregatum omnium Nominum quibus Homo distinguitur a rebus cæteris omnibus. Exempli causa, distinguitur ab omnibus Accidentibus per nomen *Corpus*; a cæteris Corporibus per nomen *Sentiens*; a cæteris Sentientibus (sive Animalibus per nomen *Rationale*. Itaq; si dicamus Homo est Corpus sentiens Rationale, erit illa propositio *Definitio* Hominis. Nomina enim quæ ad faciendum Prædicatum aggregantur complicata sunt in una appellatione illa *Homo*, ipsumq; Hominem ab omni alia re distinguunt, id est, quid sit definiunt.

A. Recte.

A. Recte dicis, neq; quicquam aliud fecisti præterquam quod resolvisti vocem Homo in partes suas. Fuisset autem satis illi qui prædefinitum haberet *Animal* posuisse, *Homo est Animal Rationale.* Definitio ergo *Definitionis* accurata erit hæc. *Definitio est Propositio cujus Prædicatum est subjecti Resolutivum.*

B. Quid autem fiet si subjectum resolvi non potest, ut plerumq; fit in Generibus summis?

A. Cum finis Definiendi sit ambiguum tollere, si per Nomina id fieri non potest, faciendum est per Exempla. Addamus ergo Definitioni nostræ pauca etiam verba, ut tota hæc sit, *Definitio est Propositio cujus Prædicatum est subjecti resolutivum, ubi fieri potest; ubi fieri non potest, exemplificativum.*

B. Perge legere.

A. [*Quæ tamen Definitio non omni Demonstrationi convenire putanda est, sed illi quæ est τȣ̃ διότι quæ etiam κυρίως Demonstratio dicitur. Ad Demonstrationem τȣ̃ ὅτι sufficit Argumentum ab effectu.*] Vellem definisset quod sit illa Demonstratio τȣ̃ ὅτι. Nam Demonstratio τȣ̃ διότι est, quando quis ostendit propter quam Causam subjectum talem habet affectionem. Itaq; quoniam Demonstratio omnis est scientifica, & scire talem esse in subjecto affectionem, est a cognitione causæ quæ illam necessario producit, nulla potest esse Demonstratio præterquam τȣ̃ διότι. Rectè ergo dicit, illam quæ dicitur τȣ̃ ὅτι non esse κυρίως Demonstrationem, id est, non omnino Demonstrationem. Nam in Sermone Mathematicorum *non esse* & *non proprie esse*, idem sunt.

B. Ratiocinatio quæ incipiens a veris Principiis Conclusionem recte infert, proprie dicitur *Demonstratio.* Neq; credo *Aristotelem* Demonstrationem vocasse, ne quidem τȣ̃ ὅτι ratiocinationem ullam in qua esset Paralogismus. Necessarium ergo est ut intellexerit ratiocinationem quæ incipit, non a Definitionibus, sed a suppositis (qualibus utuntur Physici) plerumq; incertis. Non ergo debuerunt interpretes ejus Demonstrationem τȣ̃ διότι interpretari Potissimam, sed simpliciter Demonstrationem.

A. Videtur id voluisse *Aristoteles*, neq; dissentiente *Wallisio*, qui eam appellat Argumentum ab effectu. Dicendum ergo est duplici Philosophorum inquisitioni, nimirum effectuum ex causis, & causarum ex effectibus. duplex respondere ratiocinationis genus, nempe Priori Demonstrationem, id est, ratiocinationem ex Definitionibus, quæ est scientifica; posteriori ratiocinationem ex Hypothetibus, possibilibus, quæ etsi scientifica non sit, si tamen nullus appareat effectus, ne in longissimo quidem tempore, quæ Hypothesin redarguat, facit ut animus in ea tandem acquiescat, non minùs quam in scientia. Frustra autem Demonstrationis τȣ̃ ὅτι quærimus definitionem, quæ Demonstratio non est.

Sequitur

Sequitur disputatio ejus contra *Smiglecium*; primò de *Ente Mathematico.* Quid sit Ens Mathematicum non ita bene intelligo, ut ipsum, si opus esset, possem definire, aut satis distinguere ab Ente Metaphysico, Ente Physico, Ente Logico, Ente Rationali, Ente Intentionali, & similibus, quæ nunc passim occurrunt, neque (quod puto brevi introducetur a Symbolicis) ab Ente Symbolico. Deinde defendit *Euclidis* Demonstrationem omnium primam contra *Smiglecium*, non male, nisi quod addendum esse dicat [*in nulla quidem scientia expectandum esse ut omnes ibidem Demonstrationes æquali perfectionis gradu procedant.*] Nam Demonstrationes vocat, quæ non sunt scientificæ; cum tamen initio hujus Capitis Demonstrationem appellâsset συλλογισμὸν ἐπιστημονικόν. Itaq; juxta illum, eorum quæ scimus, alia magis alia minùs scimus; quod est absurdum. [*Abunde sufficit, quanquam passim immisceantur alia* τοῦ ὅτι.] Abundè ergo sufficit si in Elementis *Euclidis* non omnia Theoremata demonstrentur Demonstrationibus τοῦ διότι, id est, sufficit si alia ejus Theoremata sciamus esse vera, alia an vera sint necne nesciamus. An Geometriæ Professor idoneus est, qui neq; (ut ante ostendimus) scit quæ sint illius scientiæ Principia, neq; (ut apparet hoc loco) quid sit *demonstrare*, id est, quid sit *docere*? Miror quî factum sit, ut Cathedram nactus sit *Savilianam*.

B. Fortasse, quod in Professoribus illis eligendis plurimùm potuerint suffragia hominum non Mathematicorum sed Theologorum.

A. Quid? Theologiæ Doctores nonne didicerant Logicam? Nam errores hi non oriuntur a defectu Geometriæ, sed Logicæ. Unde autem commendatus est Theologis?

B. Nosti quo tempore eligebatur, multùm in Civitate nostra potuisse, eos qui Ecclesiæ Regimen, in sacris, Presbyterio adjudicabant, cujus Sectæ est *Wallisius*. Præterea Commendatior fortasse erat propter Artem Symbolicam.

A. [*Igitur ut rem totam dilucidiùs expediam, tres præsertim Demonstrationum Mathematicarum sive modos, sive gradus, sive species statuo. Prima quidem est illa Demonstratio quæ per deductionem ad absurdum, seu impossibile procedit.*] Scis Demonstrandi genus hoc loco dici Ducere ad absurdum, quia ducit ad contradictoriam propositionis alicujus ante Demonstratæ Ostensive; & quidem per demonstrationem τοῦ διότι.

B. Scio; & proinde Theorema nullum, quod ex Principiis immediate demonstratur, Demonstratum dici, potest per *deductionem ad absurdum.*

A. Qui demonstraverit propositionem quamcunque esse veram, nonne

nonne simul demonstrat tum contrariam tum contradictoriam ejus esse falsam?

B. Absq; dubio.

A. Si igitur propositio ipsa demonstrata sit per Demonstrationem τῦ διότι, etiam contradictoria ejus, eo ipso quòd contradictio detegitur, demonstratur per Demonstrationem τῦ διότι.

B. Ita censeo.

A. [*Secunda Demonstrandi ratio est Ostensiva* τῦ ὅτι; *ut si recta* AC *demonstraretur æqualis esse recta* BC, *quoniam utraque Demonstrata fuerat æqualis ipsi* AB; *quæ autem sunt eidem æqualia, sunt & æqualia inter se. Estque hæc Demonstratio quidem Ostensiva* τῦ ὅτι, *non autem* τῦ διότι.] Dic mihi, si AC demonstraretur æqualis esse BC, an ideo esset Demonstratio?

B. Videris mihi quærere an Demonstratio sit Demonstratio.

A. Si Demonstratio est, scientifica est.

B. Recte.

A. An AC, BC. sciri possunt æquales esse inter se, nisi sciamus priùs utramq; æqualem esse AB?

B. Minime, neq; id dicit *Wallisius*.

A. Si sciri non potest AC, & BC, esse inter se æquales, antequàm scimus utramque earum æqualem esse AB; neq; potest demonstrari illud sine Demonstratione hujus.

B. Verum est.

A. Est ergo Demonstratio hujus, pars Demonstrationis illius.

B. Video quo tendis, nimirum, ad id quod dixisti paulò ante, in Demonstrationis Definitione, nempe esse eam Syllogismorum seriem cujus Principium est in Definitione, & finis in Conclusione ultima; ; quod & verum est, & manifestum facit Demonstrationem totam cujus Conclusio est AC, BC *esse inter se æquales*, esse Demonstrationem directam τῦ διότι. Nam utramq; AC, BC æqualem esse AB Demonstratum est per Causam efficientem, nempe per constructionem duorum Circulorum (permutatis centris) super eandem rectam AB. Imò verò eadem illa constructio causa est quod duæ vel quot vis Lineæ rectæ inter se æquales sint. Nam Radius quo Circulus describitur, mensurat per ἐφάρμοσιν distantiam a centro ad circumferentiam in locis infinitis eandem. Non ergo est illa demonstrandi ratio ostensiva τῦ ὅτι.

A. Neq; placet mihi illa ipsa distinctio Demonstrationis in *Ostensivam & Deductivam ad impossibile.* Non enim loquutio est Doctori scientiarum præsertim Mathematicarum satis accurata. Nam *Demonstratio Ostensiva* idem est quod *Demonstratio Demonstrativa.* Est enim altera, ea quæ tendit rectâ viâ ad ipsam Propositionem; altera, ea quæ

tendit

tendit ad contradictoriam ejus, viâ (primò) rectâ, deinde (per conversionem) ad propositionem ipsam.

B. Quoties audio quemquam dicere *Demonstrationem* τȢ ὅτι, vix me contineo ne interrogem τȢ ὅτι τί, sed me contineo tamen, ne quod omnes se scire dicant, solus videar ignorare. Dic ergo, cum in omni Demonstratione dicant *Quod* verum est, vel *Quod* falsum, quomodo una Demonstratio est *Quod*, alia *Propter quid?* Nescimus enim *Quod* res ita est, nisi sciamus *Propter quia* ita est, juxta id quod solemus dicere Aristotelici, *scire est per causam scire.*

A. Videtur *Aristoteles*, cum in *Physica* animadvertisset non effectum per causam cognitam, sed contrà causam quæri per cognitos effectus, atq; id non posse accurate fieri, propterea quod similes effectus non semper & necessariò similes habeant causas, ob eam rem *potiorem* Demonstrationem eam duxisse, qua effectus per causam Demonstratur (quæ est τȢ διότι) quam ea quæ causam concludit ex effectu, quamq; propterea appellavit τȢ ὅτι. Quæ tamen scientifica non est, & proinde nec vera Demonstratio. Non enim incipit a Definitionibus, sed ab Hypothesibus, quæ falsæ esse possunt; quanquam, si nulla experimenta, etiam post longissima tempora eas redarguant, satis erunt probabiles; sed Theoremata inde deducta non possunt dici demonstrata. Frustrà ergo quærit *Wallisius* Demonstrationem τȢ ὅτι inter Demonstrationes *Euclidis*. Sed pergo. [*Si quis denique objiciat, me tres demonstrationis species fecisse, cum vulgo duæ tantum statuantur, poterit ille, si placet, duarum priorum utramque Demonstrationem* τȢ *ὅτι dicere. Non enim libet de verbis contendere, modo de rebus constet.*] Benigne sane, qui quid verum sit (quia de re non constat) potestatem nobis concedit eligendi.

B. Eligo igitur hoc; unum esse Demonstrationis genus, nempe τȢ διότι, sive Conclusio directe demonstretur, sive per Deductionem ad absurdum.

A. In Capite quarto agit de Unitate, Numero, & Numeri Principio [*Unitas est secundum quam unumquodq; Unum dicitur. Numerus autem est ex Unitatibus composita multitudo.*] Scilicet ita definit *Unitatem & Numerum* Euclides.

B. An non recte?

A. Numerum quidem accurate, Unitatem autem imperite. Nam propter cognationem vocum *Unum* & *Unitas*, altera in alterius Definitione poni non debuit; non magis quam *Album* in Definitione *Albedinis*, aut *Albedo* in Definitione *Albi.* Nihil enim confert ad intellectionem vocis *concreta* sua ipsius *abstracta*, neq; contra, *abstracta* sua *concreta*. Cavit autem *Euclides* ne Definitione hac in Demonstrationibus uteretur; atq; ita factum est, ut nullum inde vitium emanaverit ad Theoremata. [*Ex his autem Unitatis & Numeri Definitionibus*

tionibus

tionibus plerique arbitrantur Unitatem Numerorum Catalogo non esse accensendam, adeoq; numerum minimum Binarium esse ; quanquam illud quidem Euclidem uspiam dixisse non memini.]

B. Si meminisset Definitionis *Euclidis*, quam proxime suprà ipse retulit, necesse est ut meminerit sentire *Euclidem* Numerorum minimum esse Binarium , nisi idem sit μονὰς & μονάδων πλῆθος. [*Operæ tamen pretium fortassis erit paucis ostendere cur Unitatem putem vere Numerum esse, aliisque Numeris annumerandam. Nec huic forsan adversabitur Euclidis aliorumque sententia probe intellecta.*] Quid an possibile est ut probe intelligatur μονάδα esse ex μονάδων συγκείμενον πλῆθος ? [*Cum enim nonnulli Unitatem, proprie loquendo, non modo Numerum esse negent ; sed & Numeri partem, adeoque* Numeri Principium impars esse *dicant, ut est Magnitudinis Punctum & Temporis Momentum, intelligendi fortasse sunt de Monade, seu Unitate, non ut Numerum singularem designat, sed ut est communis quasi Numerorum omnium denominator.* Sic enim *Numerus Quaternarius est qui quatuor Unitates, numerat.* Tune hæc intelligis ?

B. Puto.

A. Expone ea quæso

B. Considera fractionem hanc $\frac{4}{1}$. Quid significat.

A. Quatuor unitates.

B. Quare ?

A. Quia quotcunq; partes integri, Fractionis denominator Unitas denominat, earum partium numerator, numerat 4. Sed Unum denominat ipsum integrum indivisum ; sunt ergo $\frac{4}{1}$ quatuor Unitates.

B. Itaq; hoc dicit, Illos qui Unitatem numerum esse negant , tunc solummodo id negare, quando Unitas fit Denominator fractionis ut in $\frac{4}{1}$ vel $\frac{3}{1}$.

A. Dicit ergo *Wallisius*, [*dum quatuor tantundem valent ac quatuor Unitates, vox illa* Unitates *nec Numerus est, nec pars numeri, sed vel numeri denominatio seu denominator, vel ipsum numeratum.*]

B. His ergo verbis vides ut ipse, quæ obscura ante erant, clare eloquutus est.

A. Ita clare, ut scias quid illis contingere necesse sit , quibus ante nascuntur opiniones, pòst quæruntur argumenta quibus possunt defendi ; nimirum, quemadmodum iis accidit qui in tenebris oberrant , ut quacunq; moveantur impingant in aliqua offendicula. Nam ut *Unitatem* sustineat esse Numerum, *Unitates*, id est plures, numerum esse negat ; nec quatuor, aut tres, aut quot vis Unitates Numerum esse patitur.

B. Non negat quatuor *Unitates* esse Numerum, sed *vocem illam Unitates* numerum esse negat.

A. Quis

A. Quis nescit vocem illam *Unitates*, aut si vis, vocem illam *numerum* non esse Numerum? Nam numerus est unitatum multitudo, vox autem non est. Quæritur hîc an in fractione hac $\frac{4}{1}$ significante quatuor Unitates, quatuor sit numerus, ut ille dicit, Unitates numerus non sint. Imo vero Unitates esse Numerum verum fuit etiam ante quam ulla extiterunt nomina, aut *Numerorum*, aut *Unius*. *Quatuor* ergo, nisi subauditis Unitatibus, vel *Unis* numeratis, nihil est. Unitates autem nunquam non erant Unitatum numerus. Rursus, [*Vox illa Unitas est numeri denominatio seu numerator. Vox autem Una est numerus seu Unitatum multitudo (multitudinis voce laxius accepta, ut post dicitur;) dicit enim quot vel quam multæ Unitates adesse dicantur, nimirum Unicam. Aliud autem est negare Unitatem, aliud vero negare Unum Numerum esse. Eodem enim sensu ἡ δεκὰς Numerus esse negari possit, quamvis δυὰς Numerus esse non negetur.*] Primò, obscurum est quod dicit *Denominatio seu Numerator*, quasi significarent eandem rem, præsertim cum superius (quinq versibus) dixerat *Denominatio seu Denominator*. An in Fractione $\frac{4}{1}$ Denominatio est 4, Denominator 1? Deinde si vox *una* sit Numerus, erit quoq; Numerus (id est multitudo Unitatum) vox; id quod nemo intelligit. Sin *Una* sit Numerus, erit illa Numerus rerum Numeratarum, puta, *Unitatum*. Itaq; *Una Unitas* est Unitates. Tertio non est verum quod dicit, aliud esse negare *Unitatem*, aliud *Unum* esse Numerum. Nam illi quibuscum disputat, cum negant Unitatem esse Numerum, intelligunt per *Unitatem* ipsum (in concreto) *Unum*. Quarto, ἡ δεκὰς a quo negatur esse Numerus? An non ἡ δεκὰς significat propriissime idem quod *numerus denarius*, sicut δυὰς, τριὰς, τετρὰς, idem quod *numerus binarius, ternarius, quaternarius*? Sed de his negari non potest, quin sint numeri. Itaq; ἡ δεκὰς non potest negari esse numerus. Postremò, cum probandum illi esset *Unum* esse Numerum, hoc tantum probare conatus est, quosdam qui contra sentiunt, sententiam suam non satis demonstrasse.

B. Quod unum sit Numerus demonstrabit forte inferius.

A. Bene est. Pergamus. [*Sed revera, si accurate loqui velimus, non tam Unitas quam nullitas (si ita loqui liceat) seu Nullum idem respectu Numerorum obtinet, quod Punctum respectu magnitudinis.*]

B. Nollem hoc dixisset. Nam cum ab *Hobbio* culparetur quod Punctum dixerat esse nihil, negavit se ita sensisse. Nunc tamen idem dicit apertissime, cum enim sit ut *Nullum* ad *Numerum*, ita Punctum ad *Magnitudinem* certissimum est Punctum esse nihil.

A. Illud quoq; ineptum est quod cum in proxime præcedentibus distinxisset *Unitatem* ab *Uno*, ut *Non Numerum* a *Numero*, nunc

cum *Nullo*, confundat *Nullitatem*. Hoccine eſt loqui accurate? Præterea, cum dixiſſet, *ſi accurate loqui velimus*, cur ſtatim addit *ſi ita* (id eſt, non accurate) *loqui liceat?* An ſcribit dormiens. Sed progredior. [*At interrogabitur forſan, Num velim ego, a veterum pariter & Recentiorum omnium ſententia diſcedere, qui uno Ore Unitatem vocant Principium Numeri. Reſpondeo nihil abſurdi eſſe majorum inventis addere.*] Vide captum hominis Mathematici. Mathematicorum eſſe putat docere an unum ſit vocandus Numerus; quaſi non vulgi eſſet impoſitio nominum, aut quilibet è vulgo non æquè ſciret atq; centies mille peritiſſimi Arithmetici utrum Unum ſit Numerus necne, id eſt, (juxta Definitionem *Euclidis*) utrum homo ſit homines necne. Mirarer certe cum non ſolum ab *Euclide*, ſed etiam ab omnibus tum Veteribus tum Recentioribus ſciret ſe diſſentire, errorem in ſeipſo eſſe non ſit ſaltem ſuſpicatus, ſed eorum inventis hoc addidiſſe ſe exiſtimaverit, niſi ſcirem cujus eſſet Sectæ. Qui proximè ſequuntur, circiter viginti verſus, ſunt gravis & acerba reprehenſio temeritatis eorum, qui ſi vel tantillum ſciunt, aliorum omnium peritiam vel flocci faciunt vel ſuperciliose contemnunt. Cujus reprehenſionis juſtitia ita manifeſta eſt, ut nihil circa eam examinandum ſit, niſi ad quem potiſſimùm collimaverit.

B. Videtur hoc loco eos ſcriptores omnes perſtringere, qui non eadem in Mathematicis ſentiunt quæ ipſe.

A. Deinde ad inſtitutum rediens ſic ſcribit, [*quod ad rem præſentem attinet, aſſero, & veterum ſententiam probe intellectam, & qua nos aſſerimus ſatis conſtare poſſe. Ipſa enim Principii vox duplici ſaltem acceptatione occurrit, prout nempe ſignificat* Primum quod ſic, *vel* ultimum quod non. *Sic ſi hæredis jus in rem Hæreditariam ab ipſo patris interitu incipere dicatur, erit hoc Principium* Ultimum quod non, *Si verò dicamus hæredis jus inchoari a primo momento ſucceſſionis, etiam ita vere dicitur, ſed hoc Principium eſt* Primum quod ſic.]

B. Subtiliter hæc.

A. Ita; ac ſi dixiſſet finem Capitis præcedentis eſſe Principium Capitis hujus.

B. Subtiliter dico, id eſt Scholaſtice, vel Metaphyſice; Scholaſtici enim olim ſubtiliſſimi habebantur.

A. Subtiliter pro *Barbare*. Quis putabit inchoatum eſſe Jus, vel aliam rem quamcunq; tunc quando neq; ipſa, neq; ulla ejus pars exiſtit. Sed quare homo Mathematicus de Mathematicis ſcribens exemplo utitur Juris? An etiam Juris Romani peritus eſt? An potius per hoc exemplum fieri poſſe ſperabat ut eſſe crederetur?

B. Neſcio

B. Nescio sane, sed illum nunc incipere puto a Principio (ut ille vocat) *Ultimo quod non.*

A. [*Unum igitur numerum esse affirmo— minimum enim est quod affimative respondet quæstioni* quam multa.] Si dicam responderi etiam posse per *nullum*, scio quod exiget ut respondeatur affirmative. Dico ergo quæstioni *Quot* sive *quam multa*, non omnino responderi apte & plenè posse sine negatione. Nam qui *Unicum* habens *filium*, quærenti quot haberet filios, respondet per *Unum*, non satis plene respondet, quia & qui plures habet Unum habet. Respondendum ergo est non per *Unum* sed per *Unicum*, id est Unum nec plures, id est non sine negatione. Ita etiam si respondeat plures habens) *Duos*; non plene respondet, propterea quod, qui tres habet Duos habet. Respondendum ergo est per *Duos nec plures*, id est, non sine negatione. Illud ergo quod pro causa adfert quare crediderit *Unum esse numerum*, causa esse non potuit. Vin' causam quare id contra tum veterum tum recentium omnium sententiam verum esse creddiderit, dicam ego, qui eum scio melius quam ille?

B. Volo.

A. Cum legebat numerorum cifras 1. 2. 3. 4, *&c.* vel cum audiebat nomina Unum, Duo, Tria, Quatuor, *&c.* Cifras illas & nomina illa pro numeris ipsis nominatis intelligebat; ut & paulò ante cum diceret *Vox Unitas est Numerus.*

B. Credo sane. Sed quomodo *Unitatem* & *Numerum* definis tu?

A. Unum quidem (cum *Aristotele*) id quod consideratur ut *indivisum*; Numerum autem (cum *Euclide*) ex *Unis collecta plura.* Nam vox πλῆθος non significat *Multitudinem* eo sensu quo opponitur *Paucis*, ut censet *Wallisius*, sed eo quo opponitur *Uni*; adeo ut propie loquendo πλῆθος Græcum, & Latinum (non *multa* sed) *plura* idem sint. Deinde lego in margine [*numeri fracti non sunt numeri proprie dicti.*] Verene hoc?

B. Anne fractus Integer est, aut Numerus ullus est qui non sit Integer?

A. Minime. Et tamen id quod per Numerum Fractum intelligitur, est Numerus proprie dictus.

B. Qui fieri id potest?

A. Quid significatur per Numerum Fractum hunc $\frac{3}{4}$?

B. Significantur tres partes quarum *Unitas* habet quatuor.

A. Satis quidem intelligo quomodo *Unum*, quodcunque illud sit, posset dividi in 4 partes, quomodo autem *Unitas* ita dividi possit non intelligo.

B. Cum

B. Cum dico *Unitatem*, intelligo ipsum *Unum* **Integrum quod divisibile** est in partes quot quis voluerit.

A. Unum ergo Integrum sit assis. **Dic mihi an tres asses sit numerus** assium.

B. Sunt.

A. Et Numerus assium numerus proprie dictus?

B. Est.

A. Et numerus unciarum nonne est Numerus proprie dictus?

B. Æquè.

A. Et numerus Quadrantum nonne Numerus proprie dictus?

B. Etiam.

A. Et $\frac{3}{4}$ sive dodrans nonne est Numerus Quadrantum?

B. Est.

A. Idemq; Numerus fractus.

B. Vicisti. Nam qua ratione diceret aliquis Numerum integrorum magis proprie Numerum dici, quam partium, eadem ratione poterit dicere Numerum boum magis proprie dici quam ovium. Hactenus ergo non modo, non ἀκριβῆ, sed etiam inepta sunt quæ legimus, authoremq; tantæ subtilitati imparem esse indicant. Capite quinto ubi ostendere pollicetur *procreationem*, quam appellat etiam *originationem* Numerorum, expectaveram aliquid novi, ut quis primus Numeros vel saltem nomina numeralia primus invenit. Sed de hoc ne verbum quidem habet.

A. [*Si igitur ubi prius nulla erat, apponatur Unitas, fit numerus singularis; si adhuc addatur Unitas alia, emergit Numerus Binarius; accedat alia, & exsurgit ternarius — Estque hæc vera Numerorum Originatio seu Procreatio.*] Eleganter illud, *ubi prius nihil erat, apponatur*. Et ex additione Unitatum fieri Numerum, sed nec minus fieri per ablationem partium æqualium, ab Uno dato (id est per divisionem) pueri sciunt; quare autem per additionem potius quam per ablationem, pueri & *Wallisius* juxta nesciunt. Poterat ergo subtilitas hæc sine ulla existimationis suæ, aut eruditionis nostræ jactura prætermitti, quemadmodum & id quod proxime sequitur, nimirum hoc, *Est igitur impossibile ut Numerus maximus assignetur.* Nam & hoc pueri sciunt.

B. Quomodo sciunt pueri cum ipsos Geometras loqui audiant de recta divisa in partes Numero infinitas, & librum legent *Wallisii de Arithmetica infinitorum* a magni nominis Geometris *Schotenio* & *Hugenio* (editis Epistolis,) approbatum?

A. Nesciant ergo hoc pueri. Deinde ostendit dispositionem *Numerorum* in Decades, Centurias, *&c.* in perpetua ratione 1 ad 10.

B. Potuit

B. Potuit quoq; hoc præteriri.

A. Sed exempla affert numerationis Græcæ & Hebraicæ, quæ forsan præterire se potuisse non putavit, quin eruditio ejus minùs multiplex esse videretur.

B. Non modo hic, sed etiam in proxime sequentibus peritiam suam in hoc genere literarum aliquanto magis ambitiose ostentat quam est opus. *Q*uis nescit potuisse numerationem ab initio per quamlibet aliam proportionem fieri, si ita libuisset primis inventoribus? Credibile enim est, si nati fuissent homines dodecadactyli, quod Numerorum progressio fuisset facta per rationes perpetuò duodecuplas. Transi, ergo ad Caput sextum.

A. Caput sextum differramus, si vis, in diem crastinum. Nam sentio me lacessere.

B. Placet.

A. Sed Unicum hoc prius legamus. [*Tamen quod mirum dictu est, in eadem proportione decupla omnes ubique terrarum gentes mire conspirant.*] Quid si falsum hoc sit?

B. Minus id mirum erit.

A. *Walli* nostri & *Armorici* Galliæ usq; ad decem quidem ab Unitate progrediuntur ut nos; deinde resumpta Unitate (non ad viginti, sed) ad quindecem; & rursus repetita Unitate ad 20; inde ad 25, & a 25 ad 30, *&c.* tanquam post Decadem per unius tantùm manus digitos computarent. Sed more suo nimis temere, nec satis Logicè propositionem ex Inductione intulit Universalem. Memineris cras redire, circa eandem horam.

B. Faciam. Vale.

BRITI [illegible]

Dialogus Secundus.

A. Bene advenis.

B. Gaudeo.

A. Capita tria proximè ſequentia perlegi dum abeſſes. Sunt autem tota Philologica.

B. Nonne erudite ſcripta ſunt?

A. An quæ nec utilia, nec ſalſa, nec miranda ſunt, placere poſſe arbitraris? Capite ſexto, ubi pollicetur nominum numeralium Latinorum omnium derivationem a nominibus numeralibus Græcis, nihil præſtat præterquam quod conjecturam faciat a ſimilitudine literarum. Ut taceam autem quod promiſſi oblitus deducit *Secundum* a (non Græco) *Sequor*, quid tritius eſſe poteſt quam *Duo* a δύο, Tres a τρεῖς. Sex ab ἕξ, Septem ab ἑπτα, Octo ab ὀκτω derivare? Quid ineptius quam *Bellum* a πόλεμος deducere, & *Unum* dicere quaſi ὃ ἓν (mallem quaſi οὖνος) & inde per *Hoenum*, *Fohenum*, *Boenum*, venire ad *bonum*, quia Scholares dicunt Unum & Bonum eſſe convertibilia? Præterea quinq; à πέντε ricicule deducit, atq; etiam impudenter, mutanda πέν in *quin* & τε in *que*.

B. Fateor curiuſculum eſſe hoc.

A. Nec minus *Centum* ab ἕκατον; & *Mille* a μύρια vel potius a μύρια & χίλια, & *quatuor* a πίσαρες.

B. Memini eum a πίσαρες proceſſiſſe ad τέτταρες Atticum, inde ad Poeticum πίσυρες, inde ad πίτορες poſtremò ad Cambricum *pedwar* & Armoricum *pevar*. At a πίτυρα vel πέτλορα vel πέτορα facilis eſt tranſitus, ad *quatuor*, propter affinitatem literarum *p* & *qu* in *quiſpiam*, & *quiſquam*, *nuſpiam* & *nuſquam*.

A. Credin

A. Credin ita esse?

B. Scio Massiliam fuisse Phocensium coloniam Æolorum; itaq; nomen πέτορα (si Æolicum sit) potuisse à Massiliensibus venire ad Gallos; Gallorum coloniæ erant Cambri, seu Walli. Cur ergo non potuit ex πέτορα (si vox, inquam, ea sit Æolica) fieri *p var*.

A. Potuit. Sed unde didicit ille *quatuor* Æolice dici πέτορα, aut omnino vocem illam esse Græcam?

B. Forte qui pro certo habebat vocem *quatuor*, a voce πέτορα derivatum esse, nec videbat quomodo id aliter fieri potuit, dubitare noluit quin ibi esset vox πέτορα ubicunq; esset πίσυρες, & debere πίσυρα verti Attice in πίττυρα, & postea in πέτορα, ut facilis esset transitus ad *quatuor*.

A. *Julius Scaliger* deducit quoq; *quatuor* & *quinque* a Græca origine, sed aliter. Nimirum, cum antiquissimis temporibus tria tantum numerorum nomina haberent ἕν, δύο, τρία, dicebant digitis numerantes post τρία, χάτερον, & post quatuor κὶ ἕν κὶ quæ Latini pronunciabant *quatuor* & *quinque*.

B. Subtilius *Scaliger*, sed uterq; nugatorie.

A. Idem censeo. Transeamus ergo ad Caput septimum,

B. Imò verò ad Decimum; nihil enim continent Septimum, Octavum & Nonum, præter numerorum variam scriptionem, nimirum, in Cap. 7. modum scribendi numeros per literas Alphabeti communem Græcis & Hebræis; in octavo item, modum scribendi per literas Alphabeti communem Græcis & Latinis; in nono de Cyphris maxima ex parte satis cognitis, cætera partim frivola partim aliena; sed a voce *cyphra* ortum habuisse docet voces *cyphrandi* & *decyphrandi* pro scriptura occulta, & ejusdem explicatione. [*Qua scribendi ratione tempore belli civilis, cum omnes fere uterentur, non pauca hujusmodi scripta in itinere suo* (nota quod in Anglia itinera faciunt Epistolæ) *intercepta ipsi* (ut ait) *explicanda tradebantur. Et quidem eorum nonnulla tam insuperabili difficultate involuta videbantur, ut fere de illorum explicatione desperaverit, nec nisi post diuturnam inquisitionem incredibili labore superaverit. Quorum non pauca specimina in publica Bibliotheca Bodleyana Oxoniæ conservanda tradidit.*

A. Ad scientiarum *Wallissianarum* cumulum una defuit gloria bene deciphrandi; meritò ergo peritiam istam suam ignorari noluit. Præsertim cum *Thuanus* vitam scribens *Francisci Vietæ* Geometræ & Algebristæ (ante *Wallisium*) maximi, ingenium ejus ab eadem facultate laudavisset. Nam cyphræ Symbola sunt, & earum cognitio est pars Symbolicæ. Itaq; æquum erat ut ab ea Arte, ipse (ut cui deerat laudator similis *Thuano*) laudaret sese.

B. Incipit

B. Incipit hinc jam opus Arithmeticum, sed antequam ad examinationem ejus veniamus, non abs re fore arbitror si Geometriæ & Arithmeticæ Principia, quantum fieri potest, accuratissime statuamus, præsertim ea quibus utuntur (ab *Euclide*) Mathematici omnes; ut quæ in illis accurata sunt etiam nos utamur, quæ accurata non sunt corrigamus, & quæ desunt suppleamus. Sunt enim vera & accurata Principia legitimarum demonstrationum κριτήριον unicum. Definitio ergo puncti accuratene tradita est ab *Euclide*, nempe hæc, *Punctum est cujus nulla est pars?*

A. Accurata est, sed è Geometris plerisq; male intellecta. Nam verba hæc *cujus nulla est pars*, ita intelligunt, quasi scriptum esset *cujus nulla potest esse pars*. Nonne videtur tibi aliud esse *Actum* negare, aliud *negare* Potentiam?

B. Negatur *Actus* tum cum dicitur *esse Indivisum*; negatur potentia cum dicitur esse divisibile. *Euclidis* ergo Definitio tollit Puncti divisionem, at quantitatem non tollit. Nihil enim impedit quo minus *Quantum* sit id quod est *Indivisum*. Illi vero, qui dicunt Punctum esse *Indivisibile*, omnino tollunt quantitatem ejus, & faciunt ut sit *Nihil*; quod aliquoties facit *Wallisius* in omnibus ejus libris Mathematicis.

A. Divisio est opus intellectus, intellectu facimus partes; itaque Astronomi non in Cœlum ascendunt ut sphæras dividant, sed quasi divisas considerant. Idem ergo est *partes facere*, quod *partes considerare*: Ego *vero Punctum* eodem sensu, sed ut voce ea uti possimus, aliis verbis ita definiendum accuratius esse censeo. *Punctum est Corpus cujus non consideratur* (*id est*, non intrat in Demonstrationem Geometricam) *ulla Quantitas*.

B. Secundùm Definitionem hanc, impossibile est (ni fallor) ut longitudo arcûs Circuli comparari possit, cum recta linea (quod faciunt Cyclometræ) per doctrinam Tangentium & Secantium.

A. Quid ita?

B. Nonne potest Sector Circuli quilibet in partes quotlibet dividi, quæ partes omnes erunt totidem Sectores minores?

A. Potest. Quid tum?

B. Nonne Sector quilibet desinit in Punctum?

A. Ita.

B. Si ergo quadrans Circuli (exempli causa) in Millies Mille Sectores minores divisus sit; nonne iidem Sectores compositi sunt Quadrans?

A. Etiam.

B. Et cum arcus illi arcum constituunt quadranis, nonne

& Centra eorum constituent quadrantis Centrum ?

A. Rectè; & quia Centrum quadrantis pro Puncto haberi potest, habebimus Punctum Punctis Millies Millibus æquale. Jam qui Tangentium & Secantium magnitudines calculant, pro puncto sumunt totius Arcus dividendi Centrum; & proinde Latitudines Linearum majores justo, nempe unam lineam alia latiorem faciunt, & pro exilissimis Sectoribus exilissima computant rectangula.

B. Secunda Definitio est, *Linea est longitudo quæ nullam habet latitudinem.* Videturne bona?

A. Minimè. Nam quid opus est Latitudinem negare de Longitudine, quasi longitudo aliqua posset esse lata? Quamvis enim filum unum alio, vel semita una alia latior esse potest, tamen Miliare unum latius esse non potest quam aliud Miliare. Est autem, non filum nec semita Viæ longitudo sed Miliare. *Euclides* ergo in definienda Linea hoc voluit, Lineam esse Corpus in quo longitudo quidem & sola computatur, latitudo vero non computatur, nempe *viam Corporis moti, cujus Corporis, nulla consideratur quantitas*; Quemadmodum Lineam definivit *Hobbius*.

B. Nihil est in his duabus definitionibus tuis quod non valde comprobem, nisi quod non mihi videatur vox *Corpus* satis bene sonare in definitionibus Puncti & Lineæ.

A. Cur in Definitione Lineæ vel descriptione hac, *Linea fit ex fluxu Puncti*, non male sonat auribus tuis vox *fluxus*, cum fluxus non possit esse nisi Corporis? Præterea qui dicunt Lineam esse longitudinem, non loquuntur accurate, nam longa est potius quam longitudo. Et quoniam longitudo lata intelligi non potest, definitio hæc *Euclidea* idem valet ac si dixisset *Linea est longitudo*, quæ definitio non est.

B. Tertia est *Lineæ autem termini sunt Puncta.* Quid huic objicies?

A. Objicio authoritatem *Wallisii*, qui terminum Lineæ primum, id est, Principium quod vocatur *Ultimum quod non*, non esse ipsius Lineæ terminum, sed Lineæ antecedentis. Videtur autem statuere terminum etiam alterum, nempe, Finem lineæ, esse in linea sequenti, & vocari debere *Primum quod sic.* Itaq; aut falsus est *Wallisius*, aut *Euclides* falsus erat, qui terminos lineæ in ipsa statuit linea. Sed non videtur hoc loco voluisse *Euclides* quicquam definire; nec aliud explicare quam hoc ipsum, terminos lineæ non esse considerandos extra ipsam Lineam.

B. Quarta est, *Recta Linea est quæ ex æquo sua interjacet Puncta.* Qualis videtur?

A. Mala, Nec intelligibilis, nedum accurata. Inter quænam sua ipsius Puncta potest *interjacere* Linea recta, præterquam inter extrema? Et quomodo inter ea *ex æquo* interjacet magis quam curva, nisi forte quod non declinet ab aliqua alia Linea, eadem habente extrema, magis in unam partem quam in aliam? Quod si ita sit, quare non possunt esse inter eadem Puncta extrema plures rectæ lineæ. Præterea intelligi non potest quomodo linea recta *ex æquo* (id est æqualiter) interjacere inter sua extrema dicatur, nisi intelligamus prius quid sit *æquale.*

B. Definitio æqualium ab *Euclide*, nescio qua de causa, prætermissa est, quanquam circa Æqualitatem & Inæqualitatem omnis versetur Geometria.

A. Axioma octavum ad Elementum primum *Euclidis*, instar definitionis est *æqualium Linearum*, vel etiam *æqualium Superficierum*, nempe hoc *Quæ sibi mutuò congruunt ea inter se sunt æqualia.*

B. Non est ea Æqualium definitio; quanquam vera propositio, & quæ multis Theorematis demonstrandis satis bene inservierit, sed videtur potius descriptio quædam ejus quod faciunt illi qui magnitudines rerum metiuntur. Nam qui mensurant, mensuram congruere faciunt cum mensurato. Defini ergo Æqualia.

A. Æqualia sunt inter se corpora, quæ eidem loco congruere possunt. Et *Æquales magnitudines sunt magnitudines æqualium Corporum.*

B. Hæ quidem definitiones sunt Corporum & Magnitudinum *Æqualium*, non autem simpliciter *æqualium.* Nam *temporum, motuum, ponderum* aliarumq; rerum multarum æqualitati, neutra earum applicari potest.

A. Tempora, Motus, Pondera æqualia seorsim definienda sunt *ea esse quorum mensuræ* (*sive Corpora quibus mensurantur*) *æquales sunt.*

B. Nondum definiisti quid sit ἀκριβῶς linea recta.

A. Recta Linea ea est quæ per totam viam ab uno termino ad alterum æqualiter distat a quibuslibet Lineis similibus & æqualibus inter se & eosdem habentibus terminos.

B. Intelligo. Sic Axis Terræ Linea est recta, propterea quod æqualiter distat per totam viam a circumferentiis duarum pluriumve circulorum Meridianorum.

A. Sed neq; definitio hæc intelligi potest, nisi ab iis qui intelligunt quænam Lineæ similes vel dissimiles dicendæ sunt. Itaq; rectissime fecisset *Euclides* si Lineam Curvam prius definisset.

B. Quid est Linea Curva?

A. Linea Curva est cujus termini, salva quantitate, diduci possint.

B. Nam qui aliquid Curvum facit, vel ex Curvo magis Curvum, terminos ejus adducit. Jam *Lineam rectam* egomet definiam *eam esse cujus*

termini

termini diduci non possunt. Definitio quinta est, *Superficies est quæ longitudinem latitudinemq; tantum habet*.

A. Bona est. Sexta. *Superficiei termini sunt Lineæ*, similis est tertiæ, nec definitio, sed propositio, qua significatur Lineas non esse considerandas ut extra superficiem terminatas, sed in ipsa, ut Puncta in Linea quam terminant.

B. Quid est Superficies plana? Nam definitio quæ traditur ab *Euclide* eodem laborat vitio quo quarta. Illud enim *ex æquo suas interjacet Lineas* non est intelligibile. Defini ergo superficiem planam.

A. Faciam. Sed definienda est prius Linea. Est ergo *Linea, via qua fertur motum Punctum*. Et *Superficies plana via Lineæ ita motæ, ut singula ejus puncta singulas describant Lineas Rectas*. Definitio octava est Anguli plani hæc, *Planus Angulus est duarum in plano se mutuò Tangentium, & non in directum jacentium alterius ad alterum inclinatio*. Hujus Definitionis vitium primum est obscuritatis; nempe in voce *inclinatio*. Nam secundùm *Euclidem* inclinatio esse non potest nisi in Angulis acutis, itaq; Angulus rectus nullus est. Secundum vitium est falsitatis; Nam Recta & Curva ita constitui possunt, ut nec jaceant in directum, nec constituant Angulum, ut in Angulo Contactus, nisi putaret Angulum Contactus, esse Angulum quod negat post *Pelitarium Wallisius*. Ita quæ illis non *Euclidi* falsitas hæc imputanda sit. Et præterea quia duo Anguli Recti compositi faciunt Angulum, nimirum recti duplum, & tamen in directum jacent contra hanc Definitionem. Postremò Angulus quem faciunt duæ circumferentiæ vel circumferentia, & recta mutuo sese Tangentes, comparari posset quoad quantitatem cum quolibet Angulo alio Plano, quippe cui convenit Definitio hæc Anguli plani universalis. Sed non Anguli plani omnes comparari possunt. Est ergo vitiosa definitio.

B. Quomodo definis tu Angulum planum accuratius?

A. Sciendum est vocem hanc *Angulus planus* æquivocam esse. Nam cum in omni Angulo intelligantur duæ rectæ sibi mutuò occurrentes, vel saltem ad occursum tendentes, fieri potest ut duplici modo id fiat; quorũ alter est per Motum Lineæ integræ Circularem, alter per continuam Lineæ Rectæ flexionem. Quæ duæ Angulorum generationes adeo sunt diversæ, ut ipsi Anguli sint Heterogenei; nec una definitione comprehendi possint. Habet quidem uterq; nomen Anguli, sed alter simpliciter ita vocari solet, alter per Adjunctum *Angulus contactus*. Hæc cum non recte intellecta fuerint controversiam excitarunt de Angulo Contactus inter *Clavium* & *Pellitarium* quæ excitari non poterat, si definitio *Euclidis* satis fuisset perspicua.

B. Audiamus utriusq; generis Anguli definitionem tuam.

A. *Angulus (simpliciter dictus) est duarum Linearum sibi mutuo in plano congruentium, facta per motum Circularem super altero termino, ut*

Centro

centro *unius ab altera digressio.*

B. Anguli quantitas quomodo definitur?

A. Quantitas *Anguli* simpliciter dicti est quantitas *Arcus Circuli cujuslibet descripti Centro illo in quo Lineæ quæ Arcum intercipiunt se mutuo tangunt ab iisdem lineis interceptus. Angulus autem contactus est duarum linearum in plano se mutuo Tangentium digressio facta per continuam flexionem.*

B. Quare duo hæc genera Angulorum non possunt sub uno magis amplo genere contineri?

A. Quia non mensurantur per unius Mensuræ applicationem; nam Angulus simpliciter dictus tantus est quantus est Arcus Circuli interceptus, ideoq; per Arcum Circuli mensuratur. At Angulus contactus mensuratur per Lineam rectam ductam a Puncto Contactus ad Circumferentiam. Itaque magnitudines duorum Angulorum Contactus mensurantur à Linea recta quæ ducitur a Puncto contactus per utriusq; circumferentiam.

B. Intelligendum est hoc de Angulo contactus Circuli tantùm.

A. Imo vero de Angulis contactus quarumcunq; Curvarum, modo similes sint; sed quando sunt dissimiles, erunt Anguli contactus eorum iterum diversi generis.

B. Definitio nona est, *Rectilineus Angulus est quem continent duæ rectæ.* Probamne esse putas?

A. Ita.

B. Si duo Arcus Circuli se mutuò secent, vel arcus & recta, Angulus quem faciunt Rectilineus non est, neq; Angulus contactus, qualis igitur est Angulus?

A. Est Angulus simpliciter dictus, non enim a natura Linearum dependet natura Anguli. Potest enim a curva Linea in plano jacente Circulus describi, & Arcus interceptus idem erit ac si à recta describeretur, & proinde etiam Anguli quantitas eadem erit. Definitio decima est Anguli recti, & rectæ Perpendicularis, nempe hæc, *Cum recta super rectam consistens Angulos, qui sunt deinceps æquales fecerit; Rectus est uterq æqualium Angulorum. Et recta insistens, Perpendicularis dicitur Lineæ cui insistit.* Sequuntur definitiones undecima & duodecima Angulorum obtusi & Acuti brevissimæ simul & rectissimæ nimirum *Recto hunc quidem minorem, illum autem majorem esse.* Verum divisio hæc in *Obtusum*, *Rectum* & *Acutum* Angulo simpliciter dicto soli convenit. Definitio 13, *Terminus est, quod alicujus extremum est.*

B. Neq; Definitio est hæc, quia vox una per vocem unicam definiri non potest. Neq; omnino necessaria; nisi enim intellexissemus quid sit *Terminus* frustra esset definitio tertia, ubi dicit Lineæ *Terminos* esse *Puncta.*

A. Definitio 14, hæc est, *Figura est quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur*, Quæ quidem vera est. Poterat tamen idem brevius dici, *Magnitudo corporis ab omni parte finita.*

B. Neq; verò intelligi poteſt ad quid refertur Relativum *Quæ*, niſi ad Magnitudinem. Abſurdum enin eſſet dicere *figuram eſſe, figuram quæ ſub aliquo*, &c.

A. Decima quinta eſt, *Circulus eſt figura plana ſub una* Linea *comprehenſa, quæ Peripheria appellatur; ad quam ab uno puncto eorum quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ Lineæ inter ſe ſunt æquales.* Definitio hæc & ſi vera ſit, & modus deſcribendi Circulum ſine Geometrarum ope ſatis cognitus, pro accurata tamen haberi non debet. Debuit enim oſtendiſſe priùs hujuſmodi figuræ conſtructionem ſive generationem quænam eſſet, ut ſciremus aliquam in rerum natura figuram eſſe, in qua ab unico Puncto ad figuræ extremum omnes undequaq; Lineæ eſſent inter ſe æquales. Quod quidem, illis qui nunquam Circulum deſcribi viderant, videri poſſit incredibile.

B. Quomodo autem definiendus eſt Circulus per generationem?

A. Circulus eſt figura deſcripta per Lineæ in plano exiſtentis, & cujus unus terminus quieſcit, circumductionem. Qua Methodo definiendi utitur etiam *Euclides* in Definitione *Sphæræ*, *Coni*, & *Cylindri*. Decima ſexta eſt, *hoc verò Punctum Centrum Circuli appellatur*, id eſt, Punctum quod in generatione Circuli quieſcebat. Decima ſeptima hæc eſt, *Diameter autem Circuli eſt recta quædam per Centrum ducta, & ex utraq; parte in Circuli Peripheria terminata, quæ Circulum bifariam ſecat.* In qua nihil eſt non accuratum, niſi quod poſtrema verba, *quæ Circulum bifariam ſecat*, abundent. Definitio enim Diametri abſoluta erat ſine illis verbis, quæ inter Axiomata vel potius inter demonſtrata Theoremata ponenda erant. Definitiones cæteræ uſq; ad triceſimam quintam, (quæ Elementi primi poſtrema eſt) ut faciliimæ, ita etiam accuratiſſimæ ſunt. Ipſa autem poſtrema hæc eſt, *Parallelæ ſunt Lineæ rectæ, quæ cum in eodem ſint plano, & ex utraq; parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuò incidunt.*

B. Quid in hac Definitione reprehendis?

A. Definitionem hanc Parallelarum rectarum (quod attinet ad uſum) ſatis bonam eſſe non nego. Sed quoniam Paralleliſmus omnis tam rectarum, quam curvarum, tam linearum, quam ſuperficierum, ejuſdem eſt naturæ & una definitione univerſali comprehenſibilis, rectius fortaſſe feciſſet ſi Parallelas ſimpliciter definiſſet. Præterea niſi cauſa aliqua in definitione Parallelarum rectarum appareat, quare duæ rectæ nunquam concurrant, abſurdum non erit ſi hujuſmodi Lineas poſſibiles eſſe negaverimus.

B. Defini ergo ſimpliciter Parallelas.

A. Duæ Lineæ quæcunque (ſive rectæ ſive curvæ) item duæ Superficies, planæ vel non planæ, Parallelæ ſunt, in quas incidentes Lineæ rectæ facienteſq; cum utraq; Angulos æquales ad eaſdem partes ſunt ſemper ipſæ inter ſe æquales.

B. Video jam quare Parallelæ concurrere inter ſe non poſſunt; diſtinentur enim ubiq; ab æqualibus rectis iiſdemq; æqualiter & ad eaſdem par-

te.

tes inclinatis. Rectè autem apponuntur verba illa *ad easdem partes*; nam alioqui definitio non esset Parallelarum simpliciter, sed solummodo rectarum. Sequuntur postulata tria. De quibus postulatis quæro quo sensu dici possint demonstrationis Principia. Postulatur enim ut aliquid possit fieri; Principiorum autem demonstrationis natura est postulare ut aliquid sit habendum pro vero sine demonstratione, quærimus enim in scientiis non quid facere nos possumus, sed quid verum est.

A. Neq; vero sunt Postulata hæc Principia *Demonstrationis*, sed *Constructionis*. Necessaria tamen sunt, propterea quod ne prima quidem Theoremata demonstrari possunt, sine Figuræ Constructione. Nam ex Constructione, id est, ex generatione sola cognoscuntur Constructi affectiones. Postulat ergo *Euclides* ab initio *duci & produci posse lineam rectam*; & *quovis centro & intervallo describi Circulum.*

B. Erravit igitur *Wallisius*, qui Punctum nihil & Lineam sine omni Latitudine esse opinatus est. *Ductio* enim & *Productio* & *Descriptio* Motus sunt, & propterea Motus corporum (aliud enim nihil mobile est) & signant semper aliquid, & semper divisibile, & si quantum signant non semper inter demonstrandum consideratur.

A. Sequuntur Principia alia quæ appellantur *communes notiones.*

B. Quomodo differunt inter se *Postulata* & *communes notiones?* Nam etiam *communes* & *notiones* Axiomata dicuntur. *Axioma* autem est Latinè *Postulatum.*

A. Sunt revera utraq; *Postulata*. Differunt autem in eo, quod in alteris Postulatur *posse facere*, in alteris Postulatur concedi *verum esse* aliquid, ut evidens, sine demonstratione. Sed pergamus. Definitiones, secundi & tertii Elementi, quæ sunt nominum tantùm impositiones, accuratæ sunt, nisi quod Definitio quarta Elementi Tertii non sit Definitio, sed *Axioma*, sive suppositio qua notum supponitur, nimirum a Puncto ad Lineam rectam brevissimam, esse perpendicularem. Similiter definitiones Elementi quarti sunt nominum ad placitum impositiones, ideoq; reprehendi non possunt. Ad Elementum quintum Definitio prima est, *Pars est, magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.*

B. Sed si minor non metiatur majorem, num ideo non erit illius pars?

A. Erit. Sed loquitur *Euclides* hoc loco de *parte aliquota*, id est, cum major dividitur in partes æquales, illarum una hæc intelligitur. Sed cum esset in Geometria loquendum sæpe de *Mensura* & *Mensuratione*, deerat tamen hactenus Definitio *Mensuræ*. Definivit partem per Definitionem mensuræ. Nam *Mensura* est *magnitudo magnitudinis, minor majoris, vel non minoris, cum minor ipsi applicata semel vel pluries ipsam æquat.*

B. Omnes quidem omnia per applicationem metiuntur; in Corporibus consistentibus mensurandis Ulna, *Bracchio*, Pede utuntur; in fluidis vasibus. Illo nempe spectant, quod dixisti supra, locum Mensuræ in Mensurari

ſurati loco quoties, continetur invenire. Illa enim æqualia ſunt quæ ſalva quantitate, idem capiat locus. Sed & quæ æqualia non ſunt idem capit locus. Sic enim exiſtimant non modo *Walliſius*, ſed etiam Metaphyſicorum & Scholaſticorum fere tota natio,

A. Quo fundamento autem id putant ?

B. Corpora dicunt eadem exiſtentia modo rarefieri, modo condenſari. Minus autem eſſe (quanquam idem) condenſatum corpus, quam rarefactum. Fieri itaq; poteſt ut duo Corpora inæqualia quorum unum ſit magis, alterum minùs condenſatum in eodem loco ſint ſucceſſive.

A. Nonne locus locato congruere accuratiſſime dicitur ? Nonne *Euclides* æqualia eſſe dicit quæcunq; ſibi congruunt ?

B. Eſt Axioma 8 Elem. primi.

A. Quoniam igitur corpus utrumq; ſucceſſive loco eidem congruit, id eſt, loco eidem eſt æquale, erunt quoq; duo illa corpora (per Communem notionem primam) inter ſe æqualia.

B. Ita videtur. Quid autem eſt quod tot non modo Philoſophos ſed etiam Mathematicos, ipſoſq; Profeſſores potuit in errorem hunc turpiſſimum inducere ?

A. Accidit pleriſq hominibus circa ea quæ ignorant, idem quod pecoribus ; ut enim pecora ductorem gregis primum erumpentem quacunq; , ignara periculi, ſequi ſolent, ita & homines in quodlibet abſurdum a Principe opinionis ducti facile incidunt.

B. Sed quid fefellit ipſos primos ?

A. Fallere primos ſolet quod cum ſuſtinuerint dogma aliquod veriſimile quidem ſed tamen falſum, & a diſſentientibus, difficultatibus urgentur, quas ſuperare neſciunt, ne erraſſe videantur, fingunt poſſibilia eſſe quæ non ſunt poſſibilia, vel dicunt, aliquid quod non poſſit intelligi ; recipitur tamen ab iis qui malunt ſine moleſtia habere quod dicant, quam cum moleſtia quod ſentiant.

B. Videntur autem intelligere aliquid per rarefactionem & condenſationem, alioqui non inſultarent in eos qui ſentiunt contrarium.

A. Puto hoc ſentiunt, intumeſcente aliquo corpore, nihil illi admiſceri corporis adventitii, ut verbi cauſa, bulliente aqua nihil admiſceri putant aeris, ſed ipſam aquam eandem exiſtentem, in majus extendi ſpatium loci. Sed ipſos qui doctrinam hanc de rarefactione & condenſatione docere ſolent, unico tantum argumento ceſſuros credo , nimirum ſi qui ſtipendium *Walliſio*, diſpenſatores beneficii *Saviliani* ſoluturi ſunt , pro ſolidis numerarent illi totidem ſemiſolidos, dicerentq; ſolidos eſſe (frigore cui fortuito expoſiti fuiſſent) condenſatos, non puto crederet *Walliſius* id fieri (quicquid aliâs ſcribere ſoleat) potuiſſe. Secunda definitio eſt, *Multiplicis*, proba, nec difficilis, Tetia eſt, *Rationis*, ſatis inepta. *Ratio* (inquit) *eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis mutua quædam habitudo.*

B. Intelligo

B. Intelligo eos qui loquuntur de Ratione, sed de habitudine loquentes non intelligo. *Habitudo* ab *Habendo* dicitur. Quæro igitur quid est quod hoc loco *Habet*; quid quod *Habetur*; & an Ratio dicatur *Habitudo* ab eo quod ipsa *Habet* aliquid, vel ab eo quod *Habetur*, & siquidem *habeat*, quid sit quod *habet*; sin *habeatur*, a quo *habetur*. Quæ omnia sunt inepta.

A. Vox illa *habitudinis* a formulis loquendi orta est. Solebant enim Geometræ, cum vellent Rationum similitudinem explicare, Græci quidem hac voce uti οὕτως ἔχει. Latini vero hac, *ita se habet*; quam loquutionem admisit *Euclides* in Definitionem suam Rationis, quam ideo appellavit ποιὰν σχέσιν, & Latini *certam Habitudinem*. Et credibile est, si Græci vulgo pro οὕτως ἔχει dixissent οὕτως ἐστιν, *Euclidem* definituram fuisse Rationem per ποιὰν οὐσίαν, & Latini per *certam Essentiam*.

B. Quænam autem est *Rationis* definitio vera & accurata?

A. Ratio est Relatio Antecedentis ad Consequens secundum magnitudinem.

B. Quid sit Antecedens & quid Consequens intelligendum est ex Definitione *Relatorum*; sed tamen non cognoscitur ex hac definitione *Rationis* quantitas.

A. Neq; ex Definitione Trianguli ipsius trianguli quantitas.

B. Dic ergo quomodo computandæ sint Rationum quantitates.

A. Primo, Non omnis Ratio est quanta.

B. Mirum hoc dicis, *Rationem* aliam esse *Quantam*, aliam *non quantam*.

A. Ita est; nam Ratio Inæqualis ad Inæquale quantitatem habet. Sed Ratio Æqualis ad Æqualem quantitatem non habet.

B. Quare autem non habet quantitatem?

A. Quia nempe Ratio non est simpliciter magnitudo, sed cum relatione ad aliam magnitudinem, juxta quam relationem, una Inæqualitas, id est, una Ratio Inæqualium, aliâ major, aliâ minor esse potest; una autem æqualitas non potest. At ea quorum alia majora, alia minora esse possunt quanta sunt, cætera non sunt. Absurdum enim esset rogare quanta est æqualitas, contra vero rogare quanta sit Inæqualitas, absurdum non est.

B. Sed *Wallisius* in eodem esse dicet Prædicamento tum Æqualitatem tum Inæqualitatem; & proinde, si altera earum sit quantitas, alteram etiam esse quantitatem.

A. Quidnam est illud *Prædicamentum*? An domus aut Apotheca aliqua unde omnes æqualitates inæqualitatesq; (quando usus erit) depromendæ reconduntur?

B. *Prædicamentum* est vocabulorum series, secundum amplitudinem significationum ab *Aristotele* ordinata.

A. Scio, scio has nugas. Nimirum ex nominum (arbitrio *Aristotelis*) ordinatione naturam rerum æstimare solere eos, qui ingenio sapiunt alieno; cum e contra ex cognitione naturæ disponi debeant ipsa nomina.

B. Sed instat *Wallisius* contra vim argumenti hoc modo, *si Ratio æqua-*

litatis ob eam causam quantitas non sit, quod una æqualitas non est magis æqualitas quam alia, etiam Angulus Rectus quantitas non erit, quia unus Angulus rectus nec magis est Angulus, *nec major quam alius Rectus.*

A. Poterat etiam arguere sic, quia Numerus *6*, nec major nec minor esse potest quam alius Numerus 6, Numerus senarius non erit quantitas. Sed Ratiocinatio utraq; vitiosa est. Nam in genere quantitatis, tam quæ inter se æqualia, quam quæ Inæqualia sunt, quantitatem habent; ut Angulus rectus, quia Angulus in genere, & Numerus senarius, quia Numerus in genere est quantitas. Ratio autem in genere quantitas non est, sed Relatio, sive Comparatio. Potest ergo una ratio quanta esse, ut tamen alia quanta non sit.

B. Verum dicis. Sed Ratio æqualitatis ideo videtur esse quantitas, quia & ipsa major vel minor, quam alia Ratio esse potest. Est enim Ratio 5 ad 5 Ratio æqualitatis; eademq; major quam Ratio 5 ad 6, & minor quam Ratio 5 ad 3.

A. Aliud est *Tantum esse absolute*, & *solitarie* sumptum, aliud *comparative.* Ratio quidem æqualitatis major esse potest quam Ratio quantitatis minoris ad majorem, ut tamen ipsa quantitas non sit. Exempli causa, etiamsi o nihil sit, Ratio tamen o ad o major est quam Ratio o ad o — 1, id est, quam o ad minus quam o.

B. Hoc quidem verum est in Numeris vel quantitatibus fictis; sed putasne tu Rationes censendas esse eodem modo quo Numeri ficti.

A. Puto.

B. Attamen quomodo fieri potest, ut Ratio minoris ad majus quantitas sit, cum Ratio quæ sit illa major, nempe Ratio æqualitatis quantitas non sit?

A. Cum Ratio sit quantitatum comparatio, expositis duabus quantitatibus inæqualibus dupla oritur comparatio, altera minoris ad majorem, in qua quæritur quantum minor a majore superatur; altera majoris ad minorem, qua quæritur quantum major minorem superat. Itaq; Ratio Inæqualitatis *est duplex, altera Defectus, altera Excessus.* Sicut autem numeri finguntur ab o seu nihilo superari iisdem intervallis quibus ipsum o seu nihil superatur a numeris non fictis: ita ratio *Defectus* superatur a Ratione *Æqualitatis* iisdem intervallis quibus ipsa superatur a Rationibus *Excessus.* Et per consequens ratio æqualitatis superans Rationem *Defectus*, non tam Rationem *Defectus* superat quam *Defectum* Rationis, id est, *Defectum* magnitudinis qua æquari possit cum eo quicum comparatur.

B. Videris hoc velle, in comparatione Rationum promiscue computari *Excessus* & *Defectus*, similiter ac si quis habens sui æris 20 Libras, & alieni totidem, numeraret indistincte summam 40 Librarum, cum deberet numerare nihil.

A. Ita est.

B. Sed illud *Rationem Defectus esse Defectum Rationis*, ad Mathematicorum aures accedet insuetum.

A. Credo

A. Credo tibi hoc. Attamen verum esse facile agnosces, si animadvertas, quando duæ Rationes, utraq; minoris ad majorem componuntur, Rationem fieri minorem.

B. Verum est, & propterea necesse, *ut Ratio Defectus sit Defectus Rationis*. Quantitates enim omnes ejusdem generis compositæ quantitatem faciunt majorem. Etiam Defectus, si defectui addatur, fiet Defectus major, & tamen Ratio facta est minor; ex quo manifestum est quod dixisti *Rationem Defectus* esse *Defectum Rationis*; ut qui æs alienum æri addit alieno, tanto fit pauperior quanto plus habet æris alieni.

A. Rectè capis. Sciendum præterea est magnitudines Rationum tam *Defectus* quam *Excessus* determinari per magnitudinem *Differentiæ*, idq; dupliciter. Potest enim Differentia considerari vel *absolute*, ut cum dicimus comparando 6 & 3, majorem esse 6 quam 3 tribus unitatibus, quæ Differentia est numerus absolutus. Vel comparative, ut cum dicimus majorem esse 6 quam 3 sui ipsius dimidio. Unde etiam dividi solet in Geometricam (quæ a Geometris simpliciter Ratio appellatur) & Arithmeticam. Itaq; 6 ad 3, & 7 ad 4, sunt eadem Ratio Arithmetica propter differentiam eandem 3 absolute sumptam. Sed in Ratione Geometrica 6 ad 3 & 8 ad 4 eadem est Ratio, propterea quod utrobiq; differentia est Antecedentis dimidium. Cæterum Ratio Arithmetica non est habita ab omnibus pro Specie Rationis; fortasse quia ad illam (quæ est in definitione Rationis apud *Euclidem*) *habitudinem quandam*, non potuit accommodari. *Pappus* autem Rationis tredecem facit Species, quarum Ratio Arithmetica est una.

B. Perge legere.

A. *Definitio Quarta. Proportio* (Græcis *ἀναλογία*) *est Rationum similitudo.*

B. Quænam est Differentia inter Rationem *similem*, *æqualem*, & *eandem*?

A. Nulla omnino. Nam Rationes 2 ad 4 & 3 ad 6 *eadem* sunt, & *Similes*, & *Æquales*.

B. Quomodo differunt inter se *Proportio* & *Ratio*, sive *ἀναλογία* & *λόγος*?

A. λόγος quidem sive Ratio est comparatio quantitatum, Proportio verò sive *ἀναλογία* est comparatio Rationum, sive potius repetitio Rationis ejusdem in aliis quantitatibus: Exempli causa, 4 ad 3 est Ratio, & 8 ad 6 eadem Ratio in aliis quantitatibus. Sed ambæ Rationes 4 ad 3, & 8 ad 6 sunt *ἀναλογία*. Quinta. *Rationem habere inter se Magnitudines dicuntur quæ possunt multiplicata se mutuo superare*. Proba est si recte intelligatur. Quæ enim multiplicata se mutuo possunt superare, Homogenea sunt, eodemq; genere mensuræ mensurabilia; ut longitudines longitudinibus, Superficies superficiebus. Solida solidis. Quæ vero Heterogenea sunt diverso genere Mensuræ mensurantur. Sin Lineæ pro minutissimis Parallelogrammis considerentur, ut ab iis considerantur, qui Methodo demonstrandi utuntur

ea

ea, qua *Bonaventura Cavalerius* in Doctrina *Indivisibilium* usus est, habebunt inter se Rationem etiam *Lineæ rectæ & Superficies planæ*; poterunt enim tales Lineæ multiplicatæ quamlibet finitam superficiem planam, superare.

B. Mihi tamen Definitio hæc *Rationem inter se habentium*, ne sic quidem videtur accurata; habent enim Rationem inter se Mensuræ Longitudinis. Temporis & Motus; & possunt multiplicatæ se mutuo superare. Attamen inter Lineam & Tempus, vel inter Lineam & Motum Rationem esse dici non potest.

A. Potest quidem non minus dici quam *Lineam esse Tempus*. Sed *Archimedes* aliiq; Geometræ non pauci cum Tempus exponere volunt, *Esto* (inquiunt) AB *Tempus*, quos ego culpare, cum omnes loquutionem illam bene intelligant, non auderem.

B. *Wallisius* auderet.

A. Definitio sexta est *Ejusdem Rationis* quæ sic se habet.

B. Siste gradum paulisper. Nonne Analogiam modo definivit *Euclides* esse similitudinem Rationum? *Similitudo* autem *Rationum* & *eadem Ratio* eadem est res. Videtur ergo mihi *Analogiam* sive *Proportionem* hoc loco iterum definire.

A. Minime. Nihil hic peccatur. Quid enim, si quis *hominem* definiret esse *animal Rationale*, apud nescios quid *animal Rationale esset?* Itaq; in definitione hac sexta illud agit ut *Proportionem*, sive *eandem Rationem* per generationem ejus definiat. Quod ni fecisset nihil inde (ut a Principio) demonstrasset.

B. Quid ita? Definitio circuli apud *Euclidem*, non est descriptio *generationis* circuli, sed *generati*, at nihilo minùs constructio trianguli æquilateri inde ab *Euclide* Demonstratur.

A. Demonstratio illa dependet quidem ab ea definitione, sed ipsa definitio dependet a Postulato tertio, nempe, quo gratis sumitur *posse circulum quovis describi intervallo*. Jubet ergo, ad constructionem trianguli æquilateri, describi circulum; quod quo modo faciendum sit, definitio *Euclidea* non docet. Quomodo enim inveniri medium illud punctum potest, nisi prius descriptus sit ipse circulus? Vidit ergo *Euclides* definitionem *Analogiæ*, nisi ostenderet quomodo *eædem Rationes* fierent, inutilem fore ad sequentia. Itaq; definitionem per generationem addidit hanc, *In eadem Ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam: cum prima & tertia æquè multiplicia, a secunda & quarta æquè multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque, vel una deficiunt, vel una æqualia sunt, vel una excedunt, si ea sumantur quæ inter se respondent.* Sed invenire, per hanc definitionem, hujusmodi quatuor quantitates impossibile est, quia multiplicatio per omnes numeros, cum infiniti sint, est impossibilis. Non est ergo definitio hæc, sed Hypothesis.

B. Rectè

B. Recte quidem dicis; est autem Hypothesis illa vera. Vera inquam est, sed non Principium, quia demonstrabilis est, & ab *Hobbio* Capite 13°. Libri de Corpore, Art. 12°. demonstrata, sed a definitione *Ejusdem Rationis* per generationem diversa est hæc *Euclidis*. Manifestum enim est duas quaslibet *velocitates* duorum corporum motorum, habere inter se certam aliquam Rationem, & quidem (dum velocitates illæ eædem sunt) eandem: *Velocitatem* autem definit *Hobbius potentiam esse mobilis in tempore determinato determinatam Longitudinem permeandi.* Ex his manifestis generationem colligit *Ejusdem Rationis*. Dicit enim, *si duo mobilia, utrumq; velocitate invariata, percurrant duas Longitudines tempore eodem, eas Longitudines Rationem habere inter se eandem quam habent velocitates ipsæ*; & rursus, *si duo mobilia utrumq; eadem invariata velocitate percurrant duas Longitudines, habere eas eandem inter se Rationem, quam habent inter se tempora quibus percurruntur.* Quibus positis, sint duo mobilia ad punctum A, moveanturq; æquabili velocitate per AB, AC. Et velocitatem quidem unius repræsentet AB, velocitatem autem alterius repræsentet AC. Venient ergo alterum ad B, alterum ad C, in eodem tempore AC, propterea quod velocitates amborum determinantur per spacia quæ eodem tempore percurrunt. Similiter si in parte temporis AC (iisdem servatis velocitatibus) alterum veniat ad D, alterum ad E, rursus erunt spatia percursa AD & AE ut velocitates eædem, id est, ut AB ad AC. Eodem modo, si mobile idem veniat ad B in tempore AC, veniet ad D in parte illius temporis, puta in AE, quæ sit spatio AD homologa. Nec tantùm verum hoc est in motu, sed etiam in omni genere causationis, ubi causa æqualibus temporibus æqualia semper efficit. Itaq; *Eandem Rationem* (Capite 13°. Libri de Corpore, Art. 6°.) sic Definivit, *Ratio Geometrica Rationi Geometricæ eadem est, quando causa aliqua eadem æqualibus temporibus æqualia faciens, Rationem utramq; determinat.*

A. Definitio sane hæc accuratissima est, generationemq; proportionis quasi ante occulos ponit. Sed *Euclides* per suam Hypothesin Rationum Doctrinam in Elemento quinto solidissime demonstravit. Anne tantundem fecit *Hobbius* per definitionem suam?

B. Demonstravit non modo easdem propositiones quas *Euclides*, sed etiam nonnullas alias non minus difficiles, ne quidem *Wallisio* ipso contradicente. Nam hoc solum de illis pronunciat, *non videri ipsius esse.*

A. Id est simul & laudat & invidet. Quid scribis in pugillaribus?

B. Noto quod in Græco pro Multiplicibus ab *Euclide* dicitur πολλαπλάσια, & pro Multiplicatione πολλαπλασιασμός. Nam (ἀναλόγως) διπλασιασμὸς deberet verti *duplicatio*, & διπλασιὸς sicut & διπλασίων & διπλασιασθεὶς duplus vel duplicatus.

A. Quid ergo?

B. Magnam facit *Wallisius* differentiam inter Rationem, duplam & du-

 plicatam

plicatam, triplam & triplicatam, *&c.* tum in Elencho contra *Hobbium*, tum in Tractatu Elenchtico contra *Meybomium*.

A. Tanto eſt indoctior. Sed ego tibi negotium illud facile expedibo: *Euclides* enim vocibus illis διπλασιὸς & διπλασίων pro eadem re promiſcue utitur, ſicut Latini vulgò *duplum* & *duplicatum*. Voce διπλασίων, etiam in Proportionibus utitur *Euclides* pro dupla. Lege Prop. ult. Elem. 9ⁱ. Textum Græcum.

B. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ ἕως οὗ ὁ σύμπας πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

A. Quid ſignificat hoc loco ἐν ἀναλογίᾳ διπλασίονι? Nonne ſignificat proportionem ſive ſimilitudinem Rationum quæ cernitur in numeris ab *Euclide* expoſitis, nimirum his, 1. 2. 4. 8. 16, *&c.* in quibus numerus poſterior prioris ſemper eſt duplus? Nam ſi de Ratione ipſa duplicata intelligeretur, numeri 1. 2. 4. 8. 16, *&c.* non magis dicendi eſſent eſſe ἐν ἀναλογίᾳ διπλασίονι quam 1. 3. 9. 27. 81, *&c.* Itaq; propoſitio hæc *Euclidis* de numero Perfecto, in omni Progreſſione Geometrica non minus vera eſſet quam in Progreſſione hac per duplicationem. Neceſſe ergo eſt ut voce hac διπλασίων uſus ſit *Euclides* pro duplicato numero, id eſt, pro duplo, non pro duplicata Ratione. Igitur Ratio 1 ad 2 non eſt ſubdupla Ratio, ſed Ratio Simpli ad duplum ſive ſemiſſis ad Integrum; neq; inverſè, Ratio 2. ad 1 eſt Ratio dupla: ſed Ratio dupli ad ſimplum, ſive Integri ad Semiſſem.

B. Accurate hæc. Διπλασίων ergo idem eſt quod duplus. Voces autem *ſubduplus*, *ſubtriplus*, &c. barbaræ ſunt, & ab iis inventæ, qui cum in tenebris verſarentur cupiebant quoquo poſſent modo ſeſe promovere. Oſtendiſti jam διπλασίων apud *Euclidem* ſignificare in numeris duplum. Oſtende etiam quod ſignificat apud eundem, in Rationibus, Duplicatum.

A. Ecce in definitione Elementi quinti decima, ſic dicit *Euclides* Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, ubi Rationem Rationi ſibi æquali additam, id eſt, Rationem multiplicatam per 2, id eſt, Rationem duplicatam vocari vides διπλασίονα.

B. Video vocem illam utrumq; ſignificare apud *Euclidem*, tum duplum tum duplicatum, quemadmodum apud authores Græcos cæteros omnes. Video etiam vocabula Latina duplum & duplicatum idem ſignificare, ut & Græca, διπλοῦς, διπλάσιος, διπλασίων, διπλασιασθεὶς. Sed cur noluit *Euclides* uti voce διπλάσιος cum potuit, & ad evitandum ambiguitatem videtur debuiſſe, nondum perſpicio.

A. Quænam eſſe poteſt ambiguitas in vocibus quæ idem ſignificant ubiq;. Sunt qui διπλοῦν diſtinguunt à διπλασίω, hoc numerum, illud quantitatem continuam reſpicere dicentes. Sed inter διπλάσιον & διπλασίονα

σίων differentiam nullam observant, neq; Grammatici neq; Mathematici Græci. Credo equidem διπλασίων Nomen Rectum factum esse à nomine Plurali Genitivo διπλασίων,, cujus Rectus singularis est διπλάσιος. Itaq; in propositione ultima Elementi noni ἐν ἀναλογίᾳ διπλασίονι idem esse quod ἐν ἀναλογίᾳ διπλασίων, & in hac definitione 10ª, λογον διπλασίονα idem esse quod λογος διπλάσιος. Nihil ergo est difficultatis in eloquutione Mathematicorum veterum. At recentiores difficultatem sibimet ipsis creaverunt ex vocibus barbaris *subduplum*, *subtriplum*, &c. quippe qui non meminerant ex duplicatione vel etiam multiplicatione aliquid fieri posse aliquando minus. Nam quantitates fictæ quales sunt 0-1, 3-5 & aliæ, id est, minores quam nihil; quanto plus multiplicantur a numero vero, tanto minores fiunt. Definitio 7ª est Proportionalium accurata, sed & facillima. Est enim (definita jam *Eadem Ratione*) tantummodo nominatio eorum quæ Rationem inter se habent. Octava sicut 6ª demonstrabilis est.

B. Quomodo Rationem majorem definis tu?

A. Rationem quidem *majorem*, *Rationem esse* dico *majoris Antecedentis ad idem Consequens, vel ejusdem Antecedentis ad Consequens minus. Rationem* autem *minorem esse Rationem minoris Antecedentis ad idem Consequens*, vel ejusdem Antecedentis ad Consequens majus.

B. Accuratè.

A. Nona, Definitio non est, sed Propositio gratis assumpta, nempe, *Proportionem in tribus terminis paucissimis consistere*, cum tamen accurate loquendo, consistat in quatuor paucissimis. Omnis enim Ratio consistit in duobus terminis paucissimis, & omnis Proportio in duabus paucissimis Rationibus. Quando vero duæ quantitates mediæ æquales inter se sunt, id non numerum minuit terminorum. Elementi hujus quinti definitiones decem reliquæ accuratæ sunt.

B. Transeamus ergo ad definitiones Elementi sexti.

A. Sunt illæ, excepta quinta, quæ & ultima est, omnes accuratæ. Nam illa quinta, cum & demonstrari possit & demonstratione indigeat, neque pro definitione, neque pro Principio demonstrationis haberi debet. Est autem hæc, *Ratio ex Rationibus componi dicitur, cum Rationum quantitates inter se aliquam effecerint Rationem.*

B. Demonstra (quoniam demonstrabile esse dixisti) ex multiplicatione inter se Antecedentium duarum Rationum, & ex multiplicatione inter se Consequentium, existere ipsarum Rationum unius ad alteram Additionem.

A. Rationes addendas propone quas vis.

B. Rationi 2 ad 3 adde Rationem 4 ad 5 per multiplicationem.

A. Multiplico Antecedentes 2 & 4 in se, qui faciunt 8; deinde multiplico

multiplico in se consequentes 3 & 5; producitur 15. Probandum est Rationem 8 ad 15 æqualem esse ambabus Rationibus 2 ad 3 & 4 ad 5. Nam 4 multiplicans 2 & 3 facit 8 & 12. Est ergo Ratio 8 ad 12 eadem quæ 2 ad 3. Rursus 3 multiplicans 4 & 5 facit 12 & 15. Est ergo 12 ad 15 eadem Ratio quæ 4 ad 5. Sed in his numeris 8. 12. 15. Ratio primæ ad ultimam æqualis est ambabus Rationibus simul 8 ad 12, & 12 ad 15, hoc est, ambabus Rationibus 2 ad 3 & 4 ad 5. Itaq; demonstravi Rationem Rationi (per multiplicationem in se Antecedentium amborum & amborum Consequentium) additam esse, ut imperasti.

B. Quomodo autem Rationes altera alteri aliter addi possunt?

A. Si, nempe, ut Antecedens est ad Consequentem unius Rationis, ita fiat Consequens alterius Rationis ad quartam. Nam si Rationi 2 ad 3 addenda sit Ratio 4 ad 5, fiat ut 4 ad 5, ita 3 ad aliam. Prodibit $3\frac{3}{4}$. Ponantur ordine 2. 3. $3\frac{3}{4}$. Ratio ergo 2 ad $3\frac{3}{4}$ est summa Rationem 2 ad 3 & 3 ad $3\frac{3}{4}$. Est enim Ratio 3 ad $3\frac{3}{4}$ eadem quæ Ratio 4 ad 5. Et siquidem tres quantitates 2. 3. $3\frac{3}{4}$. multiplicentur omnes per 4, prodibunt 8. 12. 15. iidem numeri qui facti erant per multiplicationem.

B. Recte demonstratum est. Sed nonne sicut Ratio Rationi additur per multiplicationem, ita subductio unius Rationis ex alia fieri potest per divisionem?

A. Etiam. Nam (exempli gratia) à Ratione 8 ad 15 sit subducenda Ratio 4 ad 5. Divido ambos numeros 8 & 15 per 4, unde fiunt Quotientes 2 & $3\frac{3}{4}$ qui sunt in Ratione 8 ad 15. Rursus divido 15 per ambos numeros 4 & 5, & fiunt Quotientes $3\frac{3}{4}$ & 3, qui sunt in Ratione 12 ad 15. Positis ergo ordine numeris 8. 12. 15. si à Ratione 8 ad 15. substrahatur Ratio 12 ad 15, id est, Ratio 4 ad 5, relinquetur Ratio 8 ad 12, sive Ratio 2 ad 3.

B. An non Ratio a Ratione subduci potest etiam sine his divisionibus?

A. Potest. Nam si fiat ut Consequens Rationis subducendæ ad Antecedens suum, ita Consequens Rationis integræ ad quartam, Ratio quæ post subductionem relinquitur erit Ratio Antecedentis ad illam quartam. Verbi gratia, si a Ratione 8 ad 15 auferenda sit Ratio 4 ad 5, fiat ut 5 ad 4 ita 15 ad quartam quæ erit 12. Positis ergo ordine 8. 12. 15 si a Ratione 8 ad 15 auferatur Ratio 12 ad 15, id est, Ratio 4 ad 5 relinquetur Ratio 8 ad 12, id est, Ratio 2 ad 3.

B. Clarissimè.

A. Animadverte quam sit ab improprietate verborum, pronum hominibus prolabi in errores circa ipsas res. Sicut enim tu pro composita Ratione sumpsisti Rationem quantitatum compositarum, ita *Wallisius*, aliique plurimi Rationem duplorum sumunt pro Ratione dupla

dupla, decepti ab impropietate eloquutionis.

B. Miror autem quod tam clamosè contendat in Elencho *Wallisius* Compositionem Rationem non Additionem sed Multiplicationem dicendam esse.

A. Tam diu autem mirari non desines quam diu ab homine qui ea scripsit quæ hactenus legimus, quicquam expectabis accuratum.

B. Ex hac Rationum compositione manifestum est, expositis quotcunque quantitatibus, Rationem primæ ad ultimam æqualem esse Rationibus omnibus primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, & sic deinceps usq; ad ultimam, simul sumptis.

A. Est ita ut dicis; & ejus rei causam ostendit ipsa operatio. In quantitatibus enim tribus quibusvis A.B.C. dubitari non potest quin exposita A ad expositam B, Rationem habeat A ad B, & similiter exposita B ad expositam C Rationem habet B ad C, quare Ratio A ad C composita est ex duabus partibus nimirum, ex Ratione A ad B & Ratione B ad C; & siquidem essent quatuor quantitates A. B. C. D. Ratio B ad D (propter eandem causam) componeretur ex Rationibus A ad B & B ad C, & C ad D.

B. Video ita esse. Sed hoc melius aliquanto videtur mihi demonstrasse *Hobbius* in Libro de Corpore Cap. 13. Art. 13. definitionem deducens a doctrina de motu?

A. Sed Doctrina de motu paucissimis cognita est; cum tamen Natura omnia, non modo quæ Physicæ, sed etiam quæ Mathematicæ contemplationis sunt per Motum transigit. Primus qui scripsit de Motu quod dignum lectu erat fuit *Galilæus*. Progrediamur jam ad Elementum septimum; ubi primò definitur *Unitas*, sed (ut modo vidisti) male; deinde *Numerus* (contra sententiam *Wallisii*) optimè. Tertia Definitio est Partis) (subaudi aliquotæ) quod sit *majoris quantitatis mensura*; & rectè, si per *Partem aliquotam* intelligatur *Pars aliquota Numeri*. Alioqui *Pars* in Definitione *Mensura*, non *Mensura* in Definitione *Partis* ponenda est. Quinta hæc est πολλαπλάσιος ἐςὶν ὁ μείζων τῦ ἐλάττονος ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τῦ ἐλάττονος. Latini qui sic vertunt *Multiplex est major minoris, cum majorem metitur minor*, anne distinguunt inter *Multiplex* (quod est *Multiplicatum*) & *Multiplum?*

B. Non certe hoc loco; neq; Græci inter διπλάσιον & διπλασίονα. Nam si fecissent, non πολλαπλάσιον dixisset *Euclides*, sed πολλαπλασίονα.

A. Cætera bene se habent.

B. Transeamus ergo ad Definitiones Elementi decimi.

A. Sunt & illæ accuratæ omnes.

B. Antequam progrediare, velim dicas mihi quo fine, sive cui bono *Euclides* Theoremata illa Elementi decimi difficillima nobis Demonstra-

 vit.

vit. Cæteras enim Geometriæ partes omnes usui esse video in communi vita, aut ad ædificandum, aut ad navigandum, aut ad machinas, aut ad Calculum Temporis, aut ad Picturam, aut ad Philosophiam naturalem, aut deniq; ad aliquid, cui vero rei Linearum hæc irrationalium cognitio inserviat nondum cerno. Scio quæ pulchra sunt difficilia esse, sed ut vicissim quæ difficilia sunt etiam pulchra sint, necesse non est.

A. Quo fine hæc demonstravit certè nescio, sed quin in omni re ingenii splendor ipse per se pulcherrimus sit dubitandum non est. Attamen si ab ipso opere de consilio opificis conjicere liceat, voluisse puto *Euclidem*, quantum potuit Linearum omnium in Figuris certa & cognita lege descriptarum rationes convertere in rationes numerorum. Quod si Natura fieri passa esset computatio quælibet facillima facta esset, nimirum in tabulas digestis omnium rerum rationibus. Restant Definitiones Elementi undecimi, illæ quoq; ad scientiarum severitatem exactissimæ.

B. Quid? Tune Sphæram, Conum, & Cylindrum bene Definiri existimas per Motum Semicirculi, Parallelogrammi, & Trianguli super quiescentes Axes?

A. Quidni?

B. An Stellarum fixarum vel cujuslibet Planetæ sphæram descriptam fuisse putas a conversione Semicirculi? Similiter Axes (horum corporum) qui definiuntur ab *Euclide* per *rectam Lineam quiescentem*; nonne Axes sunt, etiamsi non quiescerent, sed quocunq; ferrentur corpora ipsa (quorum Axes sunt) ferrentur una?

A. Tu firmum hoc Argumentum esse credis!

B. Ita. Et eodem usus est *Wallisius*.

A. Professorne *Savilianus* reprehendere *Euclidem* ausus est?

B. Non *Euclidem* reprehendit sed *Hobbium*.

A. Etiam *Euclidem* si modo eodem Argumento contra utrumq; uti potuit.

B. Esto. Sed cum Lineam definisset *Hobbius* esse *corporis* (*cujus nulla consideratur quantitas*) *Moti via. Quid opus est* (inquit *Wallisius*) *notione* Motus *ut quid sit Linea intelligatur? Annon Linea corpori quiescenti insunt*, &c.? Pariter ego dico tibi, quid opus est nominare Motum ut intelligatur quid sit sphæra? Annon potest concipi quiescens Semicirculus in sphæra?

A. Si ille *Hobbium*, etiam tu *Euclidem* recte reprehendisti. Sed errastis ambo nescientes naturam Definitionis. Nonne sunt definitiones scientiarum Principia?

B. Sunt.

A. Et omnis scientia a cognitione causarum derivanda?

B. Verum.

B. Verum.

A. Ergo Principium ſcientiæ eſt cognitio cauſæ.

B. Etiam.

A. Sequitur ergo cognitionem cauſæ contineri debere in Definitione.

B. Fateor.

A. Itaq; optime definiunt illi qui generationem rei in Definitione explicant.

B. Etiam hoc concedo, & in *Euclidis* Sphæræ, Coni, & Cylindri Definitionibus generationes illorum corporum video, quanquam non ſimiliter definierat Circulum.

A. At Circulum deſcribi poſſe (qui deſcribi niſi per motum non poteſt) inter Poſtulata ut rem notam, gratis ſumſit.

B. Saltem dicere debuit *Euclides* Sphæram eſſe Solidum *quale fit* potius quam *quod fit* ex circumductione Semicirculi. Nulla enim eſt ſphæra quæ per Circumductionem facta eſt a natura.

A. Qui Figuras definiunt, Ideas, quæ in animo ſunt, non ipſa corpora reſpiciunt; & ex iis quæ imaginantur *fieri* deducunt proprietates factorum ſimilium, a quocunq; & quomodocunq; facta ſunt. Vidimus jam Principia Geometriæ tradita ab *Euclide*, quorum aliqua quidem, ſed pauca minus accurata mutavimus, reliqua ut irreprehenſibilia partim præterivimus, partim confirmavimus.

B. Revertamur ergo ad *Walliſium*, & unde digreſſi ſumus, nempe ad Caput decimum. Nam ſi bene memini eramus ad Philologicorum & Capitis noni finem, tunc cum digredi incepimus.

A. Sed differamus hæc in triduum, quo tempore lectis Arithmeticæ ejus quæ reſtant, ea tantum quæ materiam colloquia noſtro ſubminiſtrare poſſunt, diſcutienda deligam, ne ea quæ utilitatem nullam, moleſtiam nimiam nobis allatura ſunt ſæpiùs repetamus.

Dialogus Tertius.

B. LEgiſtin' reliqua Arithmeticæ Walliſſianæ?

A. Ita.

B. Plenane videntur tibi, ſicut antecedentia, erroribus?

A. Minime. Sunt enim pleraque ex iis Arithmeticæ libris deſumpta, qui pueris ediſcendi ſcripti ſunt; cætera aut *Ougthredi* ſunt, aut maxima ex parte falſa.

B. Sed quæ ab aliis habuit, ipſe ſolus demonſtravit.

A. Neque hoc quidem. Verum hæc inter legendum conſiderabimus accuratiùs. In Capite decimo, Numerationem in Notis Numeralibus vulgaribus explicat, & cujuſque Notæ, tum proprium, tum Loci valorem, tam in Fractionibus Decimalibus, quam in Integris exponit; Oſtenditque, ſicut a loco *Unitatum* ad loca præcedentia proceditur per decuplationem, ita a loco eodem ad Loca ſequentia proceditur per ſubdecuplationem. Quarum quidem rerum demonſtratio non eſt, ſed Conſtitutio fuit arbitraria. Explicatio autem & brevis & perſpicua & accurata a Magiſtro expectanda erat. Et primò quod ad Numerationem periodos adhibeat, periodumque per loca tria potius quam per quatuor aut alium numerum finiat, non videtur ad Artem Arithmeticam pertinere.

B. Sumamus numerum quemlibet; eundem (verbi gratia) quem ille ſumpſit 2,468,013,579. Quomodo numerus hîc verbis proferendus eſt.

(*A*. Recte *proferendus*, non ut *Walliſius* loqui ſolet *efferendus*.)

B. Quomodo (inquam) proferendus eſt ſine periodis?

A. Periodos utiles eſſe non negavi, ſed quæro cur locis ternis definiantur?

B. Si

B. Si Notarum valorem verbis enuntiaveris, videbis ipſe.

A. Significant Notæ illæ *duo millia millium millium, quadringenta ſexaginta octo millia millium, tredecem millia & quingenta ſeptuaginta ſex.*

B. Nonne vides verba tua diſtinguere te, quemadmodum ipſæ Notæ per loca terna diſtinguuntur.

A. Ita, ſed Latinè. Diſtingue jam tu eaſdem notas per nomina numeralia (ſi potes) Græcè.

B. Poſſum , ἔκοσιν τέσσαρες μυριάδες μυριάδων, ἑξακισχίλιαι ὀκτακόσιαι, καὶ μία μυριάδες, τρισχίλια, πεντακόσιαι, ἑβδομήκοντα ἔννεα ;

A. Sed hæ voces diſtinguunt Notas numerales non per loca terna, ſed per quaterna, hoc modo, 24, 6801, 3579. Nihil igitur ad ſcientiam Arithmeticam, quæ univerſaliter omnibus gentibus eadem eſt, ſed ad diverſas gentium Dialectos pertinet. Deinde cum dixiſſet, *cyphræ quæ locis ſupremis ponuntur nulli prorſus ſunt uſui, nullius ſaltem neceſſitatis, ſed redundant potius ; tantundem enim ſignificant* 0001 , 001. 01 , & 1 ſubjungit ridiculè, [*Fieri quidem nonnunquam poteſt ut Elegantiæ gratia, vel quo numerorum ſupputandorum collatio commodior fiat (ut in appoſito exemplo) ejuſmodi redundantes cyphræ ſcribantur*]

Libræ	Solidi	Denarij
13	12	10
24	08	06
05	04	01

Næ ille Elegantiæ æſtimator imperitus eſt qui inutiles iſtas ciphras ad ſupplendas lacunas præfigere Elegantiæ eſſe judicat. Deinde paginas duas inſumit ad declarandam naturam Fractionum decimalium ; quod etiam imperitiæ eſt. Cum enim locorum valores in Integris procedant a loco *Unitatum* ſemper, per 10 multiplicando , & Fractiones decimales procedant a loco eodem *Unitatum*, ſemper per 10 dividendo, ſupervacaneum erat diſtinguere loca dextra & ſiniſtra. Nam poſita Fractione hac decimali $\frac{111}{1000}$ erunt facti (dividendo per 10) $\frac{1}{10} \dagger \frac{1}{100} \dagger \frac{1}{1000}$ ſicut integri 10. 100. 1000. facti (multiplicando per 10,) proportionales. Itaq; tota fractio valebit $\frac{1}{10} \dagger \frac{1}{1} \frac{1}{c} \dagger \frac{1}{10000}$ Similiter Fractio hæc $\frac{354}{1000}$ valebit $\frac{3}{01} \dagger \frac{5}{100} \dagger \frac{4}{1000}$. Miror ergo quomodo verba hîc reperire potuit quibus fere duas paginas impleret.

B. Scis eum non modo Profeſſorem Geometriæ, ſed etiam Concionatorem eſſe, & propterea in quærendis verbis neceſſario & multum exerceri.

A. Sed cur numeros *integros*, & *partes decimales* conjungendas eſſe cenſuit, ſicut in hoc numero fecit, quem exempli cauſa proponit ipſe, 3579753 ? Cur etiam *partes* de legit 753 quæ inverſæ ſunt integrorum

357 ?

357? Nam lectorem imperitum a veritate abducent, tamquam regula illa divisionis per 10, non esset aliter vera.

B. Cur ita fecit nescio; nisi quia *Oughtredus* Fractiones decimales post *Unitatis* locum posuit, ut quæ fiunt a numeris post divisionem per 10. 100. 1000, *&c* residuis, & separatrice Linea qua Quotiens a numero Dividendo separatur, distinxit; eo fine ut Additionem, Substractionem, Multiplicationem, & Divisionem tam integrorum quam Fractionis iisdem operationibus complecteretur, ideo *Wallisius* qui forte quid ab *Oughtredo* fieret, non cur fieret animadvertisset, numeros ambos (integrum & fractum) conjunxit etiam ubi non esset opus per imitationem.

A. Verisimile est. Cur autem tot verbis ad rem tam facilem explicatu usus est manifesta causa est, quod ea quæ scripturiebat cruda adhuc & indigesta illi erant. Quæ autem nondum perfecte didiceris nunquam breviter & perspicue explicare poteris. Sequitur Caput undecimum de Notatione Algebrica.

B. Est in eo Capite quod non intelligo.

A. Ostende locum.

B. En. *Si vero*, &c.

A. [*Si vero eadem unitatum multitudo* (nempe 27) *in continua proportione quadrupla disponatur, emerget quaternionum quaternio unus, & duo insuper simplices quaterniones, cum tribus residuis Unitatibus.*]

B. Hoc, inquam, non intelligo. Nam si jubear disponere 27 in proportione quadrupla, continua, id est, in proportione numerorum 1. 4. 16, pro primo numero ponerem A, pro secundo 4A. pro tertio 16A; quorum summa est 21 A. Diviso ergo 27 per 21 prodibit $\frac{27}{21}$ sive $1\frac{2}{7}$, pro A. Et 4A erunt $5\frac{1}{7}$ & 16 A $20\frac{4}{7}$, qui numeri faciunt aggregatum 27: Quod verum esse scio, sed non intelligo quomodo consistit cum uno quaternario quternariorum, duobus quaternariis & tribus unitatibus.

A. Nec mirum. Nam non id voluit *Wallisius*, sed ut numerus 27 disponeretur secundum loca ab Unitate valoris continue quadrupli. Quod est verissimum. Nam si ultimus locus sit Unitatum, penultimus erit quaternariorum & tertius sedenariorum. Est autem 27 uno sedenario duobus quaternariis & tribus Unitatibus æqualis.

B. Video eum ita intelligendum esse; sed debuit sic dixisse.

A. Male quidem se explicuit. Ostendere enim voluit hoc loco quomodo scribendus esset numerus, si locorum valores non in Ratione continua decupla (ut vulgo fit) augerentur, sed in proportione qualibet alia ut quadrupla vel tripla; vel quod idem est si numerus Notarum esset minor quam (ut nunc sunt) novem, quomodo scriberetur 27. Et verum est numerum 27 qui in proportione decupla scribitur sic, 27, in proportione quadrupla debere scribi sic 123, & in proportione tripla sic 1000.

B. Sed nullam habet ejus rei demonstrationem. Ostende igitur quare ita esse necessarium est. Et sit data proportio tripla.

A. Quoniam sicut in proportione decupla novem tantum sunt notæ quibus utimur, & decima cyphra, ita in proportione tripla, duo tantum erunt Numeri digiti & tertia ciphra. Erit autem 1 in loco ultimo Unitas; Et in loco tertio ubi recurrendum est ad 1 & ciphram significabit 10 ternarium. Et in loco nono, 100 significabit 9 (ut enim 3 in 3 facit 9, ita 10 in 10 facit 100) Et in loco vicessimo septimo 1000 valebit 27 propterea quod sicut 3 ad 27 sunt in proportione 3 ad 9 duplicata, ita numerus valens 27 debet esse in proportione 10 ad 100 duplicata. Scribendus est ergo 27 per has notas ut 1 ante tres ciphras significet id quod fit ex ternario in se ter multiplicato, id est, 27.

B. Si esset tantum una nota numeralis præter ciphram, quomodo scriberetur idem numerus 27?

A. Si ita esset, valor locorum procederet per Rationem duplam, & recurrendum esset alternis locis ad 1 & ciphram vel ciphras. Nam 1 in ultimo loco significaret Unitatem, in secundo ab Unitate, 10 significaret 2, & 11 in tertio loco 3, & 100 in loco quarto 4, & 10000 in loco decimo sexto 16. (Nam ut 4 in 4 facit 16 ita 100 in 100 facit 10000) deinde 11000 in loco 24° valebit 20. & consequenter 11001 valebit 25. 11010 valebit 26, & denique 11011 valebit 27, id est, 1 Unitas, 1 binarius, 1 octonarius. & 1 sedenarius, qui simul faciunt 27.

B. Verum est. Sed nonne potest ubi valores locorum sunt in ratione dupla Numerus scribi 27 per alias notas quam 11011?

A. Potest, sed assumenda est nota binarii. Nam sub his notis proportionis duplæ 8, 4, 2, 1, subscribe 2, 2, 1, 1, hoc modo $\substack{8421\\2211}$ valebit 2211 duos octonarios, duos quaternarios, & præterea binarium, & Unitatem; qui Numeri faciunt simul additi 27.

B. Sed quando opus erit ut paucioribus notis utamur quàm novem quibus utimur; Perge legere.

A. His ita explicatis monendum duco, Universam Artem Algebræ sive Analyticæ ex hoc uno quasi fundamento dependere. Nam revera quod nobis gradus (*sive ascendens, sive descendens*) primus, secundus, tertius, *&c. illud est Algebristis*, Latus, Quadratum, Cubus, *&c*. Concedo Latus, Quadratus, Cubum, fundamentum esse (*cui insistit* dicam, an contra cum *Wallisio*) *ex quo dependet* regula Algebræ. Sed non inde dependet Ars Analyticæ. At ille illam quam modo tractavit numerationem, (nempe per locorum valores in proportionibus decuplis, quadruplis, triplis, *&c.*) Algebræ fundamentum esse statuit; id quod difficile est credere, cum ante illum multi fuerint Algebristæ, sed qui

Nume-

Numerationes has novas edidit ipſe primus eſt.

B. Nuſquam tamen quod memini, Numerationibus iſtis in ſequentibus utitur. Sed per fundamentum intelligit non illud, ſed proportionum ab Unitate incipientium varietatem omnem. Itaq; verum eſt quod dicit.

A. Eſto. Cur autem paulò poſt de veteribus loquitur Algebriſtis acſi id aut ignoraſſent aut diſſimulaſſent, & cauſam ignorantiæ eorum eam eſſe dicit *Quod Arithmeticorum* Unum *(non vero, ut oportuit,* Nullum *) cum* Puncto *Geometrico compararent.*

B. Certe in Elencho ſuo contra *Hobbium*, multis in locis affirmat *Punctum* eſſe *Nihil.* Poſtea vero in alio libello defendens librum ſuum de *Angulo Contactus* & de *Arithmetica Infinitorum*, contra eundem *Hobbium*, negat ſe ita dixiſſe. Nunc autem illum ſaltem ſic ſentire ſatis intelligo.

A. Video Phantaſiam ejus, aliis Ideis omnibus deletis, ſolis occupatam eſſe Symbolis. Quî enim aliter fieri potuit ut Symbola Radicum Numerorum etiam non quadratorum numeros appellaret, ſanus & Mathematicus? Quî fieri potuit ut Geometriam ab Arithmetica dependere diceret qui ſciret Radices numerorum quadratorum rite extractas eſſe demonſtrari non poſſe, niſi per quartam propoſitionem Elementi 2i *Euclidis* pure Geometricam? Deniq; quî potuit, Veterum Geometrarum omnium capitibus ita inſultare, ut diceret eos Algebram ignoraſſe, idque quia neſciebant *Punctum* Geometris idem eſſe quod *Nihil* Arithmeticis qui ſciret ſi *Punctum* nihil ſit, neq; *Lineam*, neq; *Superficiem*, neq; *Solidum* quicquam eſſe? Præterea, conſidera proxima ejus verba hæc, *Non quia Linea bipedalis addita facit quadrupedalem, ideo duo & duo faciunt quatuor, ſed pôtius quia hoc, ergo illud.* Subintelligitur *ergo Geometria ab Arithmetica dependere non hæc ab illa.* Belle admodum. Dic mihi propoſitio illa *duo & duo faciunt quatuor* eſtne Definitio?

B. Non.

A. At Axioma?

B. Ita.

A. Eſt ergo lumine naturali cognitum non a Magiſtro Arithmeticæ repertum; ſed cum ipſa verborum intellectione a pueris receptum. Non ergo habet ab Arithmetico Geometra *Lineam bipedalem Lineæ bipedali additam facere Lineam quadrupedalem.*

B. Non ſit ergo Axioma, ſed ab Arithmetico demonſtrandum.

A. Quis autem illud Arithmeticus aut demonſtravit aut demonſtrare ſe debuiſſe judicavit? Satis enim à nutricibus dum nomina numerorum pueros docent demonſtratur. Quid, quod infinitæ ſunt quantita-

tes continuæ quarum unius ad aliam ratio numeris explicari non potest? Quomodo ergo contemplationis sunt Arithmeticæ quæ versatur tantum in rationibus numerorum? Contra vero inter numeros ratio nulla est quæ non exponi possit Lineis. Quid quod radices numerorum, quæ Algebram fere totam sustentant, pleræq; (ut ante monuimus) numeri non sunt? Quare & calculus earum non Arithmeticus sed Geometricus est. Quid, denique quod cum ad Æquationem ventum est, problema plerumque demonstrari non potest sine aliqua Effectione Geometrica? Hæc cum ita sint, quid censes, Geometriam Arithmeticæ, an hanc illi subordinatam esse?

B. Ego verò nunquam dubitavi quin Arithmetica Geometriæ pars, nec ea magna, esset. Nam ex *Euclidis* libris pure Geometricis, educi facile potest Arithmetica; cum Libri Arithmetici ne omnes quidem simul, qui unquam scripti sunt, aut quos scripturus est *Wallisius*, sufficiant ad producendam centesimam partem Theorematum Geometricorum quæ nunc habemus.

A. Adde & hoc, quod sicut Regula Alligationis, & Regula Falsi, ita Regulam Algebræ unam esse ex Regulis Arithmeticæ.

B. Sed multo illis ampliorem.

A. Assentior. Sequitur usus Symbolorum, nempe *Necessitas*, *Brevitas*, *Perspicuitas*. [*Primo* (inquit) *Necessitatis causa; cum pro numero adhuc ignoto substituitur Symbolum, seu Character, eo usque dum ipse innotescit.*] Quasi problema quod substituto Symbolo seu Charactere investigatur, investigari non posset sine Symbolo?

B. An potest?

A. Quid? An vox hæc *Ignotum* vel *Quæsitum* minùs denotat numerum quem quærimus quam litera A, vel R. vel Character *p*? Aut minùs recte dicemus *quæsiti quadratum*, quam AA, vel Aq, vel A_2?

B. Sed brevior est scriptio per Literam unam quam per integrum vocabulum.

A. Hoc quidem concedo tibi de brevitate scriptionis, non autem de brevitate cogitatorum; quia non Characteres soli, nec sola verba, sed res ipsæ cogitandæ sunt, quæ abbreviari non possunt.

B. Nescio quid respondeam.

A. Deinde si Necessitas illa absoluta non sit, sed ex supposita brevitate, quid dices de secundo usu Symbolorum, nempe, de brevitate, quare primus usus non sit supervacaneus?

B. Nescio hoc quoque.

A. Deinde quod addit [*Brevitatis & Facilitatis causa, cum illud non raro citius peragatur per Symbola seu Species, quam per ipsos numeros*] nisi intelligatur de scriptione, falsum est. Nam & res, & verba & Symbola

bola cogitanda erunt, quorum ultimum erit inutile. Jam verò quod ad Perspicuitatem attinet, ego sane in legendis demonstrationibus per Symbola scriptis, quam per verba, majorem semper reperi Difficultatem. Tu qui Conica ejus Symbolicè scripta legisti, magis ea perspicua esse existimas, quam Conica *Apollonii* vel *Midorgii?*

B. Ego in legendis Conicis *Wallisii* cum inciderem in propositionem aliquam longiusculam, partim laboris impatientia, partim quod eam jam ante aliunde veram esse scirem, nec de Methodo ejus dubitarem, demonstrationis viam nimium leviter examinavi.

A. [*In demonstrationibus per Symbola, operationum supersunt* (inquit) *vestigia.*] Nonne videntur tibi operationum vestigia expressiora esse, verba & ciphras scriptas, sine quibus operatio fieri non potest, quàm Symbola quibus carere potest, & semper caruit operatio Arithmetica? Nisi forte putes $A+B$ dicendam esse Additionem, aut AB vel $A \times B$ Multiplicationem, & $\frac{A}{B}$ Divisionem esse A per B. Sed *Res* (inquit) *tota exemplo melius patebit.* Itaque Problema adducit quod & per Algebram & sine Algebra solvi potest; & utroq; modo recte solvit; ita tamen ut solutionibus illis nihil possit esse magis appositum ad ostendendum quod Algebra non est Analytica. Problema autem sic se habet carmine redditum.

Accessit virgo tres supplex ordine Divos,
Et tulit accedens asses, quot nescio, secum.
Oratus ductos *geminavit Jupiter asses;*
Protinus illa Jovi tres asses grata pependit.
Quotq; super fuerant duplavit Phœbus Apollo;
Grata itidem Phœbo *tres virgo reddidit asses.*
Pallas tunc reliquos geminavit virginis asses;
Assibus & tandem tribus est donata Minerva.
Unicus & superest quem secum rettulit assis.
Dic mihi quot fuerant quos primò virgo ferebat.

Solvit autem per Algebram sic.
Pro ignoto numero Assium allatorum ponit —— 1 $\surd$
Qui duplatus a Jove fit —————— 2 $\surd$
Inde Jovi solutis 3 assibus restant ——— 2 $\surd$ -- 3 Asses
Qui duplati ab Apolline fiunt ———— 4 $\surd$ -- 6 Asses
Inde Apollini solutis 3 assibus restant ——— 4 $\surd$ -- 9 Asses.
Quid duplati a Pallade fiunt ——— 8 $\surd$ -- 18 Asses
Inde Palladi solutis 3 assibus restant ——— 8 $\surd$ -- 21 Asses
Sed restabat unus tantum assis
Est ergo 1 Assis - 8 $\surd$ -- 21 Asses.
Et additis utrobiq; 21 Assibus: erunt 22 Asses - 8 $\surd$.

Et $2\frac{3}{4}$ Asses $-$ 1 $\surd$ id est, numero Assium allatorum.

B. Rectè sane, & breviter.

A. Fateor: sed in hac operatione quid vides propter quod dicenda sit *Analytica*? Sive (quod idem est) quodnam est hîc compositum quod resolvitur? Dicesne duplationem illam esse resolutionem?

B. Minimè.

A. Quid ergo? An ternorum illorum assium subductio resolutio est?

B. Non videtur.

A. Neq; est, nam Methodus tota est *Synthetica*.

B. Quid autem est Resolvere.

A. Resolvere, est id quod compositum est detexere, ordine qui sit ordini compositionis contrarius.

B. Declara hoc aliquo Exemplo.

A. Accipe Exemplum *Wallisii* Problema solventis (ut dicit) sine Algebra, hoc modo.

Relictus est Assis 1. itaq; si Pallas reddat virgini quas acceperat 3, fiunt quatuor. Si illa reddat Palladi quod ab ea acceperat dimidium, fiunt 2. Deinde si *Apollo* reddat quos acceperat 3, fiunt 5; & illa Apollini quod acceperat dimidium, fiunt $2\frac{1}{2}$; & Jupiter quos acceperat 3 Asses, fiunt $5\frac{1}{2}$. Et illa quod a Jove acceperat dimidium fiunt $2\frac{3}{4}$. itaq; omnia redeunt ad statum primum.

B. Rectè, breviter, & Analytice. Nam quod factum in Problemate describitur ab initio ad finem, id per mutuam redditionem fit infectum a fine ad initium.

A. Versus ipsius *Wallisii* sunt (neque enim hoc tacere potuit, etsi absque eo satis id manifestum erat) nam *ductos* geminavit Jupiter Asses, nemo dixisset alius.

B. Problema ergo vetus est.

A. Fortasse; at certe ingeniosum est, factumque, ut arbitror, data opera ad notandos Ethnicorum Sacerdotes, quod qui ad deos accedebant illis mediantibus, fiebant, etiam exauditi (ut virgo hæc) pauperiores.

B. Propone jam exemplum Analyticæ veræ, qua Problema datum resolvitur in sua Principia, nempe Definitiones & Axiomata.

A. Sit propositum, Exempli causa, super Lineam rectam ad unum & idem ejus Punctum constituere tres Angulos tribus Angulis Trianguli dati, unum quemlibet, uni cuilibet æqualem.

B. Datum sit Triangulum ABC.

A. Per verticem B, duco rectum DE quam suppono Angulum facere *DBA* Angulo *BAC* æqualem, & Angulum *EBC* æqualem Angulo *BCA*. Cum ergo Angulus *ABC* sit cōmunis, erunt tres Anguli ad *A*, *B*, *C* æquales tribus Angulis ad *B*, unus quilibet uni. Sumatur in *BE* (si opus est producta) *BF*, æqualis *AC*; & jungatur *CF*. Quoniam ergo duo latera *BF*, *BC*,

Trianguli

Trianguli *B C F* æqualia sunt lateribus *A C*, *B E*, Trianguli *A B C*, utrumque utrique, & Angulus *F B C* æqualis (per Hypothesin) Angulo *B C A*, superposita *B F* ipsi *C A* cum ipsa congruet, & *B C* cum ipsa *C B*, & Angulus *F B C* cum Angulo *B C A*, & proinde etiam *C F* latus cum latere *A B*, sunt ergo æquales inter se A B, C F, (per Axioma 8. Elem. primi Euclidis)& Angulus B E C æqualis Angulo B A C. per 4 *Eucl.* 1. Qui autem ad punctum *B* in recta linea D F constituuntur Anguli omnes simul æquales sunt omnibus simul Angulis constitutis ad punctum C in recta A C producta ad G. Nam partes simul omnes æquales sunt toti utrobiq;. Cum ergo Angulus B C F æqualis sit Angulo A B C, & F B C æqualis B C A, erit reliquus F C G æqualis reliquo D B A, sive B A C. Sunt igitur rectæ A B, C F, (quæ ostensæ sunt æquales) inclinatæ ad easdem partes secundum angulos æquales. Parallelæ autem sive Æquidistantes lineæ definiuntur esse illæ quæ ab æqualibus rectis, æqualiter ad easdem partes inclinatis distinentur. Parallelæ ergo sunt BF, AC. Atque hactenus ratiocinacionem qua tres Anguli Trianguli rectilinei duobus rectis æquales esse demonstrantur, in partes ex quibus erat composita resolvimus quæ *Analysis* est.

B. Quomodo autem ex illis erat composita.

A. Sic. Ex eo quod A C, D F sunt parallelæ concludunt angulum D B A æqualem esse angulo alterno B A C, & angulum F B C, alterno B C A, & angulum A B C, communem, & proinde tres D B A, A B C, F B C æquales esse tribus B A C, A B C, A C B unum quemlibet uni. Sciendum autem est quod si *Analysis* plenissimè perageretur, non minus prolixa esset quam ipsa esset demonstratio, sumpta ab ipsis principiis usque ad illatam conclusionem.

B. Quin natura Analyseos talis sit qualis hic explicatur, dubitari non potest. Attamen ne imaginari quidem possum quo facto idem fieri possit per Algebram.

A. Neque hercle ego. Nam extra comparationem Rectangulorum (& Triangulorum, quæ sunt ipsorum dimidia) in Geometria; & extra potestates numerorum in Arithmetica, Algebræ locus nullus est, neque in illis Analysis magis est quam Synthesis.

B. Exemplum ostende Algebræ per potestates, ita dividens 8 ut quadratum unius partis sit ad Rectangulum sub tota & reliqua parte ut 2 ad 1.

A. Radix Quadrata quæsiti sit *A.* Reliquus ergo numerus est 8—A Quadratum ipsum *A A.* Rectangulum quæsitum 8 in 8-8 *A*. Vis ergo *A A*—8 in 8—8 *A* :: 2. 1 esse proportionales.

B. Volo.

A. Sunt ergo *A A* ‖ 16 in 8—16 *A*; & additis utrinque 16 *A*, erunt

runt *AA* + 16 *A* = 16 in 8 = 128. Quare 16 + *A* *A*. $\surd$ 128. *A* ſunt continue proportionales. Datur ergo A, & proinde etiam A A; & rectangulum 8 in 8 - A.

B. Sed datum eſſe A, nondum ſatis perſpicio.

A. Datur media proportionalis inter extrema 16 + A & A, nempe $\surd$ 128. Quare deſcripto circulo cujus diameter eſt 16, a quovis puncto ejus ducatur tangens æqualis $\surd$ 128; ab extremitate ejus ducatur per centrum recta ad adverſam circumferentiam, eritque pars ejus intercepta inter tangentem & circumferentiam æqualis quæſitæ A; ut manifeſtum eſt per *Eucl. Elem.* 3. *Prop.* 36.

B. Ac *Vieta* in hujuſmodi rationibus exponendis alia utitur operatione. Nam ex medio puncto differentiæ cognitæ deſcribit circulum cujus radius poteſt radicem numeri 128, & ſemiſſem differentiæ.

A. Eodem recidit utraque operatio.

B. Objicio etiam nondum inventam eſſe illam radicem. Numeri enim 128. radix quadrata nulla eſt.

A. Imo radicem habet ſed nullo æqualem numero. Nam numeri 16 & 8 qui faciunt 128 in linea recta ſimiliter diviſa in partes aliquotas diſtingui poſſunt, & inter illas rectas inveniri poteſt media proportionalis cujus quadratum erit ipſe numerus 128.

B. Etiam hinc intelligi poteſt problemata quanquam *A*rithmetica quæ ſine ope Geometriæ inveniri poſſunt per Algebram nulla eſſe.

A. *Ne crede* igitur nimium poſt hæc vaniloquio Profeſſorum. Sed quid quæſo in ratiocinatione hac obſervas propter quod dicenda ſit *Analyſis*? an cum ventum eſſet ad Analogiſmum hunc 16 + *A*. $\surd$ 128. *A*:: aberamus longius a Principiis, quam cum acceſſiſſemus *ad prop.* 36. *El.* 3. *Euclidis*.

B. Agnoſco hic quidem curſum quendam & recurſum inter æqualitatem *R*ectangulorum & æqualitatem Rationum, ſed utra harum viarum magis tendat ad Principia, ſtatuere nondum poſſum. Sed progrediamur *ad Cap.* 12.

A. Capita reliqua minus moleſta erunt. Nam quæ in illis recta ſunt (ut ſunt plurima) trita ſunt & edita in omnibus ferè libris arithmeticis, præter *A*lgebrica quæ ex Oughtredi Clave Mathematica, ubi multo brevius & apertius traduntur, deſumpta ſunt. Ea vero quæ *Wallisii* propria ſunt, falſa ſunt. Id quod habet ſub initium hujus capitis, nempe hæc verba, *ſunt autem* Fractiones *ſeu* numeri fracti *non tam numeri quam unitatis fragmenta* ſuum eſt, idemque falſum & abſurdum. Nam eo ipſo quod *fragmenta* ſunt, *fragmentorum numerus* ſunt. Neque enim ratio ulla adduci poteſt quare unciæ, ſextantes, trientes, beſſes, dodrantes, cæteraque fragmenta aſſis, minus proprie numeri appellantur unciarum, ſextantium &c. quam animalia, numerus animalium

animalium. Capite decimo tertio traditur fractionum ſcribendarum ratio eadem quam vulgo ſciunt, præter notationem Fractionum Algebricarum, quas nemo intelligit niſi aliunde doctus. Quis enim intelligit quod 2 *Qu*. † 3 *R*. idem valeat quod $\frac{1\ R \dagger \frac{3}{2}}{2\ R.}$ niſi qui ante id didiciſſet

B. Sed quæ regula eſt diviſionis (per ſymbola) accurata?

A. Differatur hoc ad examinationem capitis viceſimi, id eſt, ad locum proprium. Examinetur jam *Cap*. 13. ubi primo loco modum docet demonſtrandi additionem *numerorum* (ut vocantur) *digitorum*; *verbi* (inquit) *gratia* 2 † 3 = 5 *ſic demonſtratur. Ponantur primum duo puncta, & deinde tria, quæ omnia, ſi numerentur reperientur quinque*. Libet hic quærere (cum dicat quod *reperientur quinque*) a quo reperientur. Utrum ab eo qui ſcit, vel ab eo qui neſcit 2 & 3 eſſe 5? ſi ab eo qui ſcit, id ei demonſtratum erat tunc cum neſciret. Sed qui potuit id fieri numerando, ab eo qui ſciret tantum quid eſſent duo & tria, neſciens quid eſſent quinque? Vides ergo ut nugatur.

B. Sed perge.

A. *Vel ſic quoniam notum eſt ex ipſa numerorum procreatione* (*quam Cap.* V. *tradidimus*) *quod ſit* 1 † 1 = 2 *&* 2 † 1 = 3 *&* 4 † 1 = 5 *&c, erunt etiam* 2 † 3 = 1 † 1 † 3 *&* 3 † 1 = 4 *&* 4 † 1 = 5. Quomodo autem notum eſt per *Cap*. 5. quod ſit 4 † 1 = 5? Num id illic demonſtratur? Vel ſi demonſtretur, ex quibus principiis?

B. Caput illud quintum definitionum eſt, vel ut ipſe dicit quæ ibi traduntur ſunt inſtar definitionum.

A. Principium ergo eſt 4 † 1 = 5 cur non & 2 † 3 = 5 æque principium eſt, & proinde indemonſtrabile quod erat demonſtrandum? Non intellexit *Walliſius*, ſaltem oblitus eſt 1 † 1 binarii, 2 † 1, vel 1 † 1 † 1 Ternarii & ſic deinceps eſſe definitiones, neque accedere ad Magiſtros Arithmeticæ niſi qui jam ſciunt quot ſunt in quolibet *numero Digito* unitates.

B. At in numeris quos articulos & compoſitos vocant methodus addendi quænam ſit ſatis demonſtravit. Num & hoc negas?

A. Non nego. Sed ita demonſtravit quemadmodum omnes; nam qui id quod ipſi faciunt inter operandum clarè eloquuntur, ut qui dicit 8 & 7 ſunt 15 ſubſcribo unitatum loco 5, reſervo 1 ad locum decadum, deinde, quod reſervabatur cum 9 & 6 & 8 ſunt 24 decades, id eſt duæ centuriæ & 4 decades, ſubſcribo decadum loco 4 & centuriarum loco 2, ut numerus totus fiat 245, non modo tres numeros 80, 68, 97, ſimul addidit, ſed etiam recte additos eſſe demonſtravit. Quid habet ille amplius in demonſtratione tripaginali præter abundantiam verborum & obſcuritatem ſymbolorum?

B. Nihil. Sed non animadverterat voces illas puerorum dum nume-

K 2 ros

ros ita addunt additionis esse demonstrationem.

A. Similiter demonstrationes Substractionis, Multiplicationis & Divisionis sunt ipsæ voces operantium, subtrahentium (inquam) multiplicantium & dividentium. Capite 14 de subductione tractat, quam eodem modo demonstrat quo demonstravit additionem.

B. Transeamus ergo ad 15 *de Additione & Subductione Speciosa.*

A. Quod habetur hoc capite totum desumptum est ex *Cap.* 2 & 3 *Oughtredi* clavis Mathematicæ, cujus sunt brevissimæ veruntamen plenissimæ regulæ; altera *A*dditionis, nempe ut *conjungantur magnitudines servatis signis*; altera de Subductione, nempe ut *conjuncta utraque magnitudine mutentur omnia signa magnitudinis subducendæ.* Additionis exemplum apud *Oughtredum* est,

ad 5 *A*
adde—3 *A*

fiunt 5 *A* — 3 *A*
sive 2 *A*

Ubi *Wallisius* videns differentiam magnitudinum nempe 2 *A* poni ab *Oughtredo* pro 5 *A* — 3 *A*, duas facit regulas ex una; alteram ubi signa similia sunt, alteram ubi dissimilia, regulam Magistri sui elegantissimam non necessario corrumpens, Idemque facit circa regulam Subductionis.

B. Videtur mihi in hoc capite docere debuisse *Wallisius* quo pacto numeri dati radix alterius numeri dati radici commodissime addenda vel subducenda sit.

A. Additio radicum commodissima non fit sine multiplicatione; multiplicatio autem infra traditur *Cap.* 18.

B. Istuc ergo eamus.

A. Duo igitur capita integra prætermittemus?

B. Sed percurramus leviter.

A. Titulus Capitis 16 est *de Additionis* & *Subductionis probatione.* Per *probationem* intelligitur *Demonstrationem*?

B. Minime; nam neque additi subductionem, additionis; neque residui additionem subductionis; neque Probationem noventariam, demonstrationem esse ipse dicit.

A. Quomodo autem *Probatio* est si *Demonstratio* non est? Immerito ergo reprehendit *Ramum* quod examinationes illas negaverit esse probationes, affirmaveritque veritatem operationis satis ex ipsa apparere operatione; id quod ego paulo ante dixi, nempe, operationem ipsam suæ veritatis esse demonstrationem. Caput 17 additionis & subductionis exercitium est; ubi computat, primos annos a mundo condito ad annum præsentem, nempe ab initio ad diluvium; a diluvio ad Arphaxad; ab illo ad Tharam; a Thara ad *Abrahamum*, & promissionem,

B.

B. Siste paulum. Cujus rei promissionem? salutisne gentium in semine *Abrahami*, an promissionem terræ *Canaan*?

A. Non distinguit, habens fortasse utramque pro eadem. Deinde a promissione ad *Exodum*; ad Templum; ad Christum; ad Æram vulgarem; ad annum Christi 1655. Deinde de annis moræ & servitutis *Israelitarum* in *Ægypto* disputat, & eorum computat mirabile incrementum.

B. Scio. Nempe ut obiter Chronologiam sacram emendaret.

A. Nec tamen emendationes suas satis probat; nec si probasset, pars ulla hujus capitis ad Arithmeticam pertineret. Vides ergo hominis ostentationem miseram quicquid aut in scientiis, aut in linguis, aut in Historia scire se sibi videbatur in publicum importune proferentis, certa juxta & incerta, etiam in libro Mathematico. Accedo jam *ad Cap*. 18. de *Multiplicatione*. Audi ergo, primo, quomodo definit *Multiplicationem*. *Multiplicare* (inquit) *est numerum invenire qui datam habeat rationem ad numerum datum*. Utrum propositio hæc (nam definitio non est) vera an falsa sit unico exemplo intelligi potest. Sit datus numerus quilibet 6 & data ratio 4 ad 5, potesne tu aut ille numerum quæsitum invenire per solam multiplicationem? datus 6 multiplicandus est, sed per quem numerum? quis (inquam) est multiplicans? an multiplicantem invenias per multiplicationem? Productus erit $7\frac{1}{2}$. Nam 4. 5:: 6. 7. $\frac{1}{2}$ sunt proportionales. Numerum ergo quæsitum non invenies nisi dividendo $7\frac{1}{2}$ per 6. Emerget autem quotus $1\frac{3}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$. Quatnam autem Multiplicatione reperies istum $\frac{5}{4}$?

B. Intelligit ille datum oportere esse multiplicantem, eumque unitatis multiplum.

A. Alii quidem ita intelligunt. Interea vero definitio quam ipse affert vitiosa est; quam tamen ad alias etiam quantitates applicat, paulò inferius dicens, *multiplicare* esse *Datæ alicui quantitati aliam in data Ratione exhibere*.

B. Erravit.

A. Tanto decuit illum minus definitionem reprehendere allatum ab *Euclide* nempe quod *Numerus numerum multiplicare dicitur quando quot sunt in ipso unitates, toties componitur is qui multiplicatur, & factus est aliquis*.

B. Quid est quod hic reprehendit?

A. Quod vox hæc *is qui multiplicatur* posita sit in definitione *Multiplicationis*.

B. Nonne merito?

A. Ita. Sed cum tantillo opere emendari potuit, rectius fecisset, arbitror, si emendata potius usus esset, quam si falsam in locum ejus substituisset.

B. Sed

B. Sed quomodo corrigenda est?

A. Sic. *Numerus numerum multiplicare dicitur quando quot sunt in illo unitates, toties componitur hic, & aliquis fit.*

B. Recte & tam parva mutatione emendata est, ut fine ullo Geometriæ damno (& si peccatum sit contra Logicam) potuisset retineri.

A. Etiam retinebitur. Reliqua capitis hujus eadem sunt quæ vulgo traduntur, sed verbosiùs, adeoque obscurius ab *Wallisio*. Quod autem ad operationis demonstrationem attinere videatur, nihil affert; neque vero opus erat ut afferret, cum, ut jam sæpius dixi, ipsa operatio perfecta, sit perfecti operis Demonstratio.

B. Sequitur Caput 19 de Divisione.

A. Nihil hic video novi præter tritarum jam omnium manibus regularum declarationem longam & frigidam & (siquidem id tibi aliquid videbitur) operationis formam aliquoties variatam.

B. Operationis alicujus formam variare non equidem difficile esse arbitror iis qui formam ejus unam aliquam jam intelligunt, si tamen alio & alio loco scribere residuam, vel alio atque alio modo divisorem multiplicare & subducere formam operationis novam constituere dicendum sit. Additionem & Subductionem radicum quadraticarum prætermissam ab *Wallisio* in hunc locum rejecisti. Ostende ergo nunc qua methodo operationes illæ perficiantur commodissimè, id est ubi fieri potest, accuratissimè; ubi fieri non potest, cum minimo errore.

A. Sed ostendendum primo est quomodo radix quadratica multiplicanda sit per numerum. Radicem autem per numerum multiplicandi regula hæc est. Quadretur tum numerus tum radix, & quadrata inter se multiplicentur, eritque facti radix factum quæsitum. Exemplum. Sit R q 4, multiplicanda per 6. Quadratum R q 4 est 4. Quadratum a 6 est 36. 4 in 36 producit 144, radix 144, nempe 12 est id quod fit ex ductu 6 in R q 4, id est, in 2. Quod sic demonstro. Sint duo quadrata A A = 36, B B = 4 erunt ergo A A, A B, B B, continuè proportionales, nimirum in ratione A ad B. Est autem A B id quod fit ex radice A sive 6 in radicem B sive 2.

B. Recte hoc. Sed cur non melius est dati quadrati radicem primo invenire, & deinde inventum multiplicare per datum numerum.

A. Quia (nisi numeri dati sint quadrati) inventa radix accurata non erit, sed error aliquis certe inerit qui post major fiet per multiplicationem, quæ multiplicatio per hanc regulam evitatur.

B. Video, hoc exemplo, quod datis duobus quadratis circa diametrum, completi super totam diametrum quadrati utrumvis complementorum, medium est proportionale inter quadrata data.

A. Ita est.

B. Adde jam radici quadraticæ radicem quadraticam.

A. Regula hæc est. Quadrati inter se multiplicentur ; producti radix inveniatur, dupliceturque; duplicatæ addantur numeri quadrati dati ; Radix summæ est summa radicum propositarum. Exempli gratia. Radix quadratica numeri *9* sit addenda radici quadraticæ numeri 25. Quadrati inter se multiplicati faciunt 225, Cujus numeri radix quadratica est 15, qui duplicati sunt 30, cui numero si summa quadratorum addatur nempe 34, fiunt 64 ; cujus radix 8 æqualis est radici numeri *9* una cum radice numeri 25. Demonstratur autem sic. Multiplicatæ inter se radices faciunt unum ex complementis; & duplicatus facit duo complementa ad duos quadratos *9* & 25 super eandem Diagonalem dispositos ; additis ergo ipsis quadratis, fit quadratum a recta æquali lateribus ambobus. Illius ergo radix æqualis est summæ radicum propositarum.

B. Rectè. Multiplica jam numerum Radicum in numerum Radicum.

A. Regula est hæc. Ducatur quadratorum unus in alterum ; radix producti multiplicetur per factum ex numeris. Exempli causa sint Rq. numeri *9* multiplicandæ in 3 Rq. numeri 4. Quadrati 4 & *9* inter se faciunt *36*, factus ex numeris 3 & 8 est 24 ; qui multiplicatus in Rq. *36*=*6* facit 144. Tantundem faciunt 8 Rq *9* id est 24 in 3 Rq 4 id est in *6*. Demonstratur autem sic. Radix *9* in radicem 4, est radix ejusqui fit ex *9* in 4, per regulam primam supra traditam. Quare 8 Rq *9* in 3 Rq 4, est id quod fit ex 24 Rq ejus numeri qui fit ex *9* in 4 ; id est quod fit ex 24 in *6*, id est numeri 144.

B. In numeris quidem quadratis operabimur per hanc regulam accuratissimè; etiam in numeris non quadratis minor multo erit error quam si radices extractas non veras post multiplicaremus. Nam multiplicaremus unà errorem ; sed eadem ne est methodus multiplicandi radices cubicas quæ fuit multiplicandi radices quadraticas ?

A. Eadem. Nam illic ostensum est productum ex radicibus inter se radicem esse producti ex quadratis inter se. Idem autem hic ostendam de radicibus cubicis, quadrato quadraticis, & cæteris potestatibus. Sit enim datus cubus A A A, cujus proinde radix est A. Sitque datus numerus B, & per consequens datus est cubus ejus *B B B*. Dico factum ex A in *B* esse radicem cubicam numeri facti ex A A A, multiplicati per *B B B*. Factum enim a cubis est A B A B A B cujus Rq. est A B,

B. Ostende operationem in numeris, multiplicans Radicem cubicam numeri 64 in numerum 5.

A. Hoc est in radicem cubicam numeri 125. Multiplico 64 in 125, & factus est 8000 ; cujus radix cubica est 20 factus (ex 5 multiplicatis in radicem cubicam numeri 64, id est) ex 5 in 4. Similiter si duo numer

mer

meri multiplicentur inter se, facti radix quadrato quadratica æqualis erit facto ex ipsorum radicibus quadrato-quadraticis. Exempli causa sint multiplicati inter se 16 & 81, factus erit 1296 cujus radix quadrato-quadratica est 6 factus ex 2 radice quadrato-quadratica numeri 16 & ex 3 radice quadrato-quadratica numeri 81.

B. Manifesta hæc sunt, sed si plures radices quadraticæ, puta 6 radices numeri 4 ducendæ sint in plures radices, puta in 4 radices numeri 9, quid faciendum est?

A. Regula est hæc, Multiplicentur inter se ipsi numeri quadrati, & producti radix ducatur in factum ex numeris (qui radices indicant) inter se multiplicatis. Productus erit factus ex numeris radicum inter se multiplicatis. Itaque si 9 ducantur in 4 fit 36 cujus radix in 24 facit 144. Tantundem faciunt 6 radices numeri 4 in 4 radices numeri 9.

B. Unde id contingit?

A. Si quadrati numeri ponantur esse A A, B B, multiplicati inter se erunt, A A B B. Et $6\ A = 6 \sqrt{4}$ & $4\ B = 4 \sqrt{9}$, & 6 A in 4 B erunt 24 A B id est, $24 \sqrt{A\,A\,B\,B}$. id est $24 \sqrt{36}$, id est 144, factus ex 6 A $(= 12)$ in $4\ B = 12$.

B. Verum quid si numeri dati non sint quadrati?

A. Habemus tamen quæsitum veritati quantum possibile est proximum. Nam $24 \sqrt{36}$, inveniri possunt per regulam primam supra exhibitam sine radicis non accuratæ multiplicatione, nempe multiplicando 24 in se, & productum in 36. Orietur enim 20736, cujus radix est 144, idem numerus qui prius. Itaque etsi numerus 20736, quadratus non esset nulla tamen esset erroris (qui radicibus numerorum non quadratorum necessario adhæret) multiplicatio. Sed & in radicibus cubicis eadem est regula. Nam si 3 Rc numeri 8 ducendæ sint in 4 Rc numeri 27, multiplico inter se cubos, faciunt 216, cujus radix cubica est 6, qui multiplicans 12, factum ex numeris radicum facit 72, tantundem autem faciunt 3 radices cubicæ numeri 8 (nempe 6) ductæ in 4 radices cubicas numeri 27 (nempe in 12.) Similis quoque est methodus in radicibus quadrato-quadraticis, & radicibus cæterarum potestatum. Nam numeri radicum multiplicati erunt totidem A B, id est totidem radices quadrato-quadrati A A A A, in quadrato-quadratum B B B B.

B. Divide nunc numerum radicum quadraticarum per numerum alium radicum quadraticarum. Verbi gratia, divide 6 Rq numeri 36 per 2 Rq numeri 9.

A. Regula est hæc. Multiplicetur numerus radicum utrobique in ipsam radicem, & productus per productum dividatur. Radix quotientis est quotiens quæsitus. Itaque cum 6 Rq numeri 36 sit radix numeri 216, & 2 Rq numeri 9 radix numeri 36, multiplicatis 216 per 6, nempe per 2 Rq 9, fit 1296, diviso 1296, per 36 quotiens erit 36, cujus

radix

radix est $6 = 6\frac{Rq\,36}{2\,R\,9}$. Ostenditur autem sic. Sit $AA=36$. Ergo 6 Rq $AA=6\,A$. Sit $9=BB$. Ergo 2 Rq $BB=2\,B$. Et $\frac{6\,A}{2\,B}=6$.

B. Etiam hoc ostende, quomodo dati numeri radix quadratica dividatur per numeri dati radicem quadraticam.

A. Sit Rq 49 dividenda per Rq 16. Regula est, Dividatur numerus major per minorem; radix quadratica quotientis est quotiens quæsitus. Itaque diviso quadrato 49 per quadratum 16, fit $\frac{49}{16}$, cujus radix est $\frac{7}{4}$ nempe quotiens divisi 49 per 16. Demonstratur autem sic. Sit numerus major A A, minor B B. Radix ergo illius A, hujus B. Et diviso A A, per *B* B, fit quotiens $\frac{AA}{BB}$; Dantur numeri A A, *B B*; datur ergo quotiens divisi A A per B B, nempe; $\frac{AA}{BB}$; quare datur etiam $\frac{A}{B}$. Sic datis 49 & 16 datur quotiens $\frac{49}{16}$ & radix ejus $\frac{7}{4}$.

B. Quomodo autem radix quadratica numeri non quadrati a radice quadratica numeri etiam non quadrati subtrahitur?

A. Si radices illæ sint commensurabiles, per hanc regulam. Dividatur uterque numerus per maximam amborum mensuram communem. Radix autem majoris dividatur in rationem radicis quotientis ad radicem Quotientis. Exempli causa, sit Rq 20 subducenda ex Rq 45, divisis 45 & 20 per communem eorum mensuram maximam 5, Quotientes sunt 9 & 4 & eorum radices 3 & 2. Divide ergo *R*q 45 in rationem 3 ad 2; eritque segmentum minus *R*q 20; ex quo cognoscitur residuum ad *R*q 45.

B. Sed *R*q 45 cum numerus non sit, dividi in rationem 3 ad 2 accuratè non potest. Velim ergo scire cujus numeri radix sit illud residuum.

A. Aliam igitur methodum radices commensurabiles tum subducendi tum addendi, nec quadraticas modo sed etiam Cubicas habebis ex Clave Mathematica *Oughtredi*; *A*dditionis quidem hanc. Dividatur uterque numerus per maximam amborum mensuram communem; radices utriusque Quotientis simul addantur; totius quadratum per eandem communem mensuram multiplicetur; producti radix est radicum numerorum propositorum summa. Exemplum operationis affert hoc. Sit *R*q 147 addenda *R*q 12. Divisis ambobus numeris per maximam communem mensuram 3; fiunt quotientes 49 & 4; quorum radices sunt 7 & 2. Quadratus a 7 † 2 est 81 qui ductus in eandem communem mensuram 3 facit 243, cujus radix quadratica æqualis est radicibus quadraticis utriusque numeri 147 & 12. Substractionis autem exemplum hoc est. Quadretur (non ut antè summa, sed) differentia radicum 7 & 2, quæ est 5, cujus quadratus est 25,

qui multiplicatus per eandem maximam communem mensuram 3 facit 75, cujus radix est æqualis numero qui relinquitur deducta Rq 12 ex Rq 147.

B. Num demonstrat hoc *Oughtredus*?

A. Minime. Propositum enim illi (puto erat Algebram) non omnibus scribere, sed Geometris qui quomodo demonstrandum esset ex ipsa operatione intelligere possunt.

B. Demonstra hoc tu.

A. Quod datum est sumo, radices numerorum 147 & 12 esse commensurabiles. Sunt ergo eædem radices numerorum quadratorum. Ut ergo 147 ad 12, ita est quadratus numerus ad quadratum numerum. Dividantur ambo per eorum communem mensuram maximam 3, eruntque quotientes 49 & 4. Est ergo ut 147 ad 12 ita quadratus numerus 49 ad quadratum numerum 4, & ut Rq 147, ad Rq 12 ita 7 ad 2. Additis simul 7 & 2 fit 9, cujus quadratus est 81, qui numerus multiplicatus per communem mensuram maximam 3 faciunt 243, ut ergo 147 ad 49, ita est 243 ad 81; & ut 12 ad 4, ita est rursus 243 ad 81, Quare ut 147 † 12 ad 49 † 4, ita est 243 ad 81. Et proinde ut Rq 147 † Rq 12, ad Rq 49 † Rq 4, id est ad 7 † 2, ita est Rq 243 ad Rq 81, id est ad 7 † 2. Quare Rq 243 æqualis est Rq 147 † Rq 12. Quod erat demonstrandum. Similis est demonstratio subductionis. Est enim ut Rq 147 ad Rq 12 ita 7 ad 2. Quare si subducatur 2 ex 7, erit ut Rq 147 —— Rq 12, ad Rq 12, ita 7—2, (id est 5) ad 2. Est autem quadratus a 5 = 25, qui multiplicatus per eandem maximam mensuram communem 3 facit 75; est ergo ut Rq 147 —— Rq 12, ad 7 —— 2 ita Rq 75 ad 7 —— 2, sive ad 5, est ergo Rq 147 —— Rq 12 = Rq 75. Eadem est Methodus etiam in subducendis addendisque radicibus cubicis, & radicibus cæterarum potestatum, nisi quod in additione & subductione radicum quadraticarum quadratorum qui ex divisione numerorum per maximam eorum communem mensuram oriuntur, summa vel differentia ducitur in communem mensuram; in cæteris verò potestatum radicibus, summa & differentia potestatum propriarum addendæ, & substrahendæ & per numerorum propositorum maximam communem mensuram multiplicandæ sunt.

B. Sunt hæc quidem liquidò & breviter demonstrata, sed fortasse etiam demonstrata sunt in capite sequente, ubi multiplicare & dividere docet *Wallisius* algebricè.

A. Operationum harum neque in eo capite, neque in toto hoc opere (etsi ab illo appellatur *Opus Arithmeticum integrum*) ne mentio quidem ulla est. Nihil enim aliud istic docet, qnam multiplicare, & dividere symbola (ut cuilibet manifestum esse potest qui caput illud legerit,) & hæc quoque ex *Oughtredo* & *Digghesio*. Itaque caput illud nempe

Cap.

Cap. 20. transiliamus. Etiam *Cap.* 21. (in quo agit de multiplicationis, & divisionis probationibus) possumus (cum nihil contineat neque boni, neque mali) ut innocuum quidem sed inutile, sine damno præterire. Caput 22 continet multiplicationis & divisionis exercitium in mensurandis & comparandis rectangulis; in quo nihil quidem reperio quod, ut falsum, redarguendum sit; omnia verà puerilia, & non necessaria, facilia tamen, eademq; verbosissimè ut pueris, symbolicè, ut *Wallisiis* scripta sunt: sequitur Caput 23 cui titulus, *Euclidis elementum secundum Arithmetice demonstratum*, id est, ut mox subjungit, *totum fere Elementum secundum*. Nam demonstrat Theoremata prima tantùm decem. Sed quomodo demonstrat? Theorema primum per symbola scribit; & pro omni argumento, *patet* (inquit) *ex calculo*.

B. An pleniorem exigis demonstrationem quam est calculus?

A. Minimè. Sed cum eædem propositiones per calculum demonstratæ extent apud *Clavium*, quorsum attinuit aliorum laborem σφετερίζεσθαι?

B. Fortasse ille brevius eas demonstravit.

A. Tantum abest ut demonstrationes *Wallisii* breviores sint illis *Clavii*, (quanquam Symbolicè scriptæ) ut plusquam triplo sint longiores. Et præterea citius intelliget lector quilibet etiam symbolicus decem illas demonstrationes *Clavii*, quam quamlibet unam ex demonstrationibus *Wallisii*. Denique propositiones illæ a quolibet, qui earum intelligit demonstrationes Geometricas, non minus ad numeros applicari possunt quàm a *Clavio* applicatæ sunt.

B. Pergamus ergo ad *Cap.* 24. *de Geodæsia*. Sed primo, dic mihi quid differt *Geodæsia* a *Geometria*?

A. Nihil, nisi quod quibusdam hominibus mirum in modum placet vocum Græcarum efformatio aliqua vel compositio nova, ad ostentationem peritiæ linguæ Græcæ. Sed diu nunc est quod ea vox (significans terræ divisionem) pro parte artis Agrimensorum usurpata est. Nosti quam exigua & trita pars ea sit Geometriæ quâ utuntur Agrimensores. Docetur autem hoc Capite novi nihil, sed quomodo triangulorum (& proinde *Polygonorum* rectilineorum) areæ ad numerorum Calculum reduci solent.

B. Nonne etiam Circuli & Sectorum mensurationem, & quadraturam Circuli hic docet?

A. Scribitur quidem in margine libri, *Mensuratio circuli & portionum ejus*; & paulo inferius *de Circuli quadratura*; *& ratio perimitri circularis ad diametrum*. In textu autem negat se hæc docere, sed de illis fusius dictum esse dicit in sua *Arithmetica Infinitorum*. Dicit præterea *Josephum Scaligerum*, *Severinum Longomontanum*, *& nuperrime Thomam Hobbs*, *immortales sibi inde singulis laudes deberi somniantes, mire hallucinatos esse*.

B. Socios adjungit *Hobbio* non ignobiles.

A. Sed quid habet ipſe *Walliſius, de quadratura Circuli* in ſua *Arithmetica infinitorum.*

B. Tu, ſi voles, videbis ; nam afferam tibi etiam illum librum (poſtquam, hunc excuſſerimus,) excutiendum.

A. Caput 25 eſt *de quantitatum invicem comparatione quoad Differentiam, & quoad Rationem*, id eſt, ut vulgo loquimur de rationibus Arithmetica & Geometrica. Dicit autem ſciendum eſſe quantitates non niſi Homogeneas comparandas eſſe ; & hoc quidem rectè. Deinde ſubjungit *ſi quis autem contrarium fecerit, puta, datæ lineæ ad datam ſuperficiem, vel Temporis ad Lineam Rationem inquirens, idem erit ac ſi quæſiverit quantum temporis æquetur Lineæ.*

B. Videtur hic repetere illud quod *Hobbio* ante objecerat, quod quantitatem Temporis cum quantitate Lineæ comparaverit.

A. Prætereo loquutionem illam barbaram, *idem erit*, &c. Sed a te quæro utrum idem ſit quærere quam rationem habet quantitas temporis ad quantitatem Lineæ, & quærere quantum temporis æquatur Lineæ.

B. Puto.

A. Quantitas temporis quid eſt ?

B. Nonne ipſum tempus determinatum ?

A. Et quantitas Lapidis quid eſt ?

B. Non eſt reſpondendum nunc ut prius, nempe eſſe ipſum Lapidem determinatum.

A. Refugis ſcilicet abſurditatem dicti, *Lapis eſt quantitas.* Attamen non minus abſurde dicitur tempus eſſe quantitatem.

B. Quid ita ? Cum in prædicamento Quantitatis *Tempus* ſit, *Lapis* non ſit.

A. Quamdiu eſt, quod tempus ſit in illo Prædicamento, & a quo ibi collocatum ?

B. Poſitum ibi eſt ab *Ariſtotele.*

A. Si non poſuiſſet non ibi eſſet, Nihil ergo agis niſi oſtendas quare ſic collocatum eſſe oportuit. *Tantum* quidem dicitur eſſe tam *Corpus naturale* quam *Tempus* ; neutrum autem dici poteſt abſtracte *Quantitas.* Omnis enim Quantitas (ſi accurate loquendum eſt) aut *Longitudo* eſt, aut *Superficies*, aut *Solidum*, ſive ut quidam loqui ſolent corpus Mathematicum. *Tempus* autem & *Motus*, & *Vis* cæteræque res de quibus quæri poteſt quantæ ſunt, quantitates habent, quibus quantæ ſunt determinatur, aliquas vel aliquam ex illis tribus, nimirum illas ipſas quibus menſurantur. Temporis jam menſura quænam eſt ?

B. Motus.

A. Scio. Sed ipſius motus quænam eſt menſura.

B.

B. Linea. Nam per Lineas metimur Motus, saltem metiri possumus, & per Motum Tempus.

A. *Rectè*. Et quod mensuram metitur, metitur etiam Mensuratum. Est ergo Linea mensura Temporis, potest autem Temporis mensura comparari cum Linea, hoc est Linea cum Linea.

B. Imo necesse est ut comparetur, quia alioqui non esset mensura. Video jam quanquam absurdum sit Lineam dicere Tempori æqualem esse, non tamen absurde dici quantitatem Lineæ æqualem esse Temporis quantitati. Assentior ergo tibi, quæri posse Rationem quantitatis Temporis ad quantitatem Lineæ, etsi non ad ipsum Tempus, ut neque ullius quantitatis ad Corpus naturale. Pudet ergo mei, tum etiam *Wallisii*, cui in hac re & nonnullis aliis nimium temere crediderim. Sed non satis intelligo cur potius *quantitatem Lineæ* dicis quam simpliciter Lineam.

A. Quia accuratè loquentes Lineam dicemus esse *Longam*, potiùs quam *Longitudinem*. Est enim Linea id quo longitudines mensuramus, nempe corpus aliquod, ut funis, virga, brachium, pes, vel aliquid simile; & quia dum eo utimur in rebus mensurandis, unam ejus dimensionem nempe longitudinem solam consideramus, ob eam rem obtinuit habere & dici longitudinem.

B. Fuimus sanè ego & *Wallisius* tardiores quam ut hæc ita esse (nisi ab aliis moniti) intelligeremus; cæterum ego aliquanto magis cavi quam ille, ne deridere viderer ea quæ non satis intelligerem, ne postea vera esse apparerent. Non ergo comprobo ea quæ subjungit, nimirum, Quærere quam Rationem habeat quantitas Lineæ, ad quantitatem Temporis *non minus absurdum esse, quam si quæratur quot colores constituunt sonum, & quot soni constituunt gravitatem.*

A. Sed ille se a scommatis abstinere ideo non potuit, quia ex eorum numero est, qui de iis quæ semel conceperint, dubitare non possunt.

B. Quos dicis?

A. Eos dico qui in civitate degentes, civitatisque commodorum participes, & a civili potestate accipientes quod vivunt, summo tamen imperanti civitatis imperare, saltem non obedire, postulant.

B. Mitte ista. Perge legere.

A. Ita faciam. Vides interim quantitates Temporis & Lineæ esse Homogeneas; Homogeneæ enim quantitates sunt (ut in superioribus Colloquiis agnovisti) quarum mensuræ ἐφαρμόζουσι. Accedens inde ad distinctionem Rationis Arithmeticæ a Ratione Geometrica, Illam esse dicit *qua comparantur magnitudines secundum differentiam*, & id quidem recte; *hanc, secundum quam una est alterius quotupla vel quantupla.*

B. Quid est illud quantuplum? Latinum certe non est.

A

A. Απορία λόγων βήξ Proverbium Græcorum quod Latine sonat, *cui hæret oratio tussit*, verum est; sed & verum est eos qui dicendo progredi aliàs nesciunt, necesse aliquando habere nova verba cudere quæ nihil significant non plus quam tussis. Nam cum deberet dicere rationem Geometricam esse tunc cum una quantitas tanta est respectu alterius, quemadmodum superius dictum est,& ignorans naturam rei dixit esse tunc cum una quantitas est quantupla alterius.

B. Imo vero non ignorans,sed nolens videre edoctus ab *Hobbio*(nam is illum hoc docuerat) voluit saltem aliter loqui, ut videretur dissentire. Infæliciter.

A. Paulo post, eadem exemplo illustrans, *Secundo* (inquit) quæsito satisfit ubi ostenditur quotuplum sit *hoc ad illud* (voluit dicere *hoc illius*) omissa voce *quantupla*. Ex quo intelligitur Rationem *diametri* ad *Latus*, Geometricam non esse, cum altera alterius totupla esse non possit. Itaque melius aliquanto fecisset, si retinuisset *quantuplum*.

B. Quomodo vertitur Anglicè *quantuplum* vel *tantuplum*.

A. Viderint lectores Angli. Sed lego. [*In posteriori de Ratione sive proportione quæritur, differentia interim minime considerata.*] Quid? in comparatione Geometrica 4 ad 2 vel 2 ad 1 nullane habita est ratio differentiæ?

B. Æque ac in Ratione Arithmetica. Nam differentia inter 4 & 2 est dimidium Antecedentis, & differentia inter 2 & 1, est item dimidium differentiæ inter antecedens & consequens, Quarum differentiarum si nulla haberetur consideratio, nulla consideraretur omnino ratio.

A. [*Divisionis* (inquit)*quotiens ostendit Rationem dividui ad divisorem.*] Verum est. Sed in sequentibus, quoties proposito suo expedit, quotientem semper dicit esse dividui ad divisorem Rationem ipsam; quippe qui absque eo Regulam Auream demonstrare non potuisset, Si *Pondus* (inquit) A *sit ad Pondus B ut Linea α ad Lineam β, non tamen dici potest* (*vicissim*) *ut pondus* A *ad Lineam α ita pondus B esse ad Lineam β*.

B. Siquidem per *pondus* intelligat *ponderis quantitatem*, non video cur non possit ita dici. Nam quantitates ponderis & Lineæ exhiberi possunt in duabus Lineis.

A. Consentanea hæc sunt iis quæ ubique habet loquens de Natura Quantitatis; confundit enim *Abstractum* cum *Concreto*, *quantitatem* cum *quanto*, tanquam significarent idem. Sed vide quam imperite loquitur in sequentibus. Nosti Geometras, quando datur area rectanguli cum uno coefficentium, latus alterum solere invenire per Applicationem areæ ad latus datum; Arithmeticos autem dato numero & uno numerorum per quorum multiplicationem factus est, alterum invenire per divisionem. Itaque propter similitudinem methodi, Divisio

pag. 79

ſio Arithmeticorum & Applicatio Geometrarum pro eadem re haberi conſuevit. Exempli cauſa, ſi rectangulum dicatur eſſe 12 intelligitur continere 12 Rectangula æqualia & toti ſi[illegible]lia; quod ſi dividatur per 6, intelligitur per 6, ſex ex iſtis rectangulis. Ita ut ſi quæratur quoties 6 rectangula contineantur in 12 rectangulis ejuſdem cum illis magnitudinis, reſpondebitur (ſecundum quotientem) 2. Itaque applicatio Geometrarum vere & proprie dicitur Arithmeticorum diviſio. Quod autem latus, id eſt linea per applicationem prodeat, cum per diviſionem prodeat numerus rectangulorum, id contigit quia ſimilitudo & æqualitas rectangulorum facit, ut alterum quidem indicet numerum rectangulorum ſimilium & æqualium, alterum vero numerum multiplicantem. Neque in rectangulis tantum ſed etiam in quibuſlibet Parallelogrammis idem accidit. Quod cum ille non videret mirè ſe torquet, cruda & indigeſta cogitata ſua explicare cupiens. Itaque diviſionem eſſe negat (niſi *καταχρηστικῶς*) quotientemque non proprie dici id quod prodit, neo reſpondere queſtioni *quot* aut *quoties*; cum tamen manifeſtum ſit, id quod prodit eſſe latus cujus ſegmenta ſunt numerus ſegmentorum indicans quoties numerus minorum Parallelogrammorum contineatur in Parallelogrammo toto. Exempli gratia, in Parallelogrammo *A B C D*, diviſo *A B* in 6 partes æquales, & *A C* in 2 partes æquales *A E*, *E C*, Latus *A C* (nempe quotiens) eſt 2, indicans ſex parallelogramma contenta in A F, contineri bis in toto parallelogrammo B C. Deinde paulo poſt, *ubi magnitudo* (inquit) *aliqua numero dividitur, non tam diviſio eſt quam multiplicatio.* Quod falſum eſt; imo vero abſurdum, magnitudinem per numerum dividi, ut nulla tamen fiat diviſio. Nam ſi quæratur quoties 2 A reperiantur in 1 A reſpondetur accurate $\frac{1}{2}$ ſemel, æque acſi quærenti quoties 12 continentur in 6 reſponderetur $\frac{6}{12}$. At *quæritur (inquit Walliſius) quoties numerus quadratorum in Area A B, contineat numerum Longitudinum in latere A, ut proveniat numerus Longitudinum in latere B.* Itaque in numero quadratorum, id eſt, in parallelogrammo continetur numerus longitudinum, id eſt, longitudines aliquot faciunt ſuperficiem. Quod & abſurdum eſt, & contra ea quæ proxime ante dixerat, nimirum, *hic non quæri quoties A continetur in plano A B.* Sin per numeros quadratorum & longitudinum intelligi vult numeros ſimpliciter, ut ſenſus ſit, numerum aliquem ſimpliciter (id eſt) nullarum rerum numerum contineri in Area parellelogrammi A B, loquitur aliquanto etiam abſurdius.

B. Veritatem circa differentiam inter Applicationem plani ad lineam, & diviſionem numeri per numerum pauci ſunt qui non intelligunt, ſed videntibus quaſi per nubem, utrum accuratiſſime conveniant inter ſe nec ne, non ſatis conſtat.

A, Imo vero potius id quod conſtat neſcientes eloqui, coguntur a ſua

sua ipsorum 'ακυϱολογία veritati quam enuntiare nesciunt contradicere. Quod proxime sequitur *Rationes omnes* (subaudi Geometricas) *quorumcunque ad invicem quantitatum esse inter se Homogeneas* peracutum est, adeo ut non intelligatur. Ubi definivit *Homogeneum* ?

B. Nusquam. Sed definiisti tu Homogeneas quantitates eas esse quarum mensuræ congruere possunt.

A. Sed quænam mensura est qua computantur inter se duæ rationes? Per Lineam minorem metimur majorem; & per superficiem minorem, majorem superficiem; nimirum, unam alteri superponendo. Sed an & rationem majorem superponendo metimur, vel ratio rationi superponi potest ?

B. Minime. Sed possunt quantitates ipsæ quarum ratio quæritur una supra aliam poni, & Rationes ipsæ sic comparari; ut fecit *Hobbius*, *Cap.*13. *Art.*6. Libri *de Corpore*, in quo Capite Theoremata *El.* 5 Euclidis omnia, & nonnulla alia non minus pulchra, breviter & perspicue Demonstravit.

A. Si ab illis quæ ibi dicta sunt suam hanc rationum Homogeneitatem derivavit, recte fecit; id nescivit tamen. Præterea quod dicit Lineam & Pondus Heterogenea esse, verum est, potest tamen esse ut eorum quantitates sint Homogeneæ; nam ut Lineæ ad Lineam ratio in duabus lineis; exhibetur sic etiam eorum ponderum ratio in duabus lineis exhiberi potest Ut enim cubus ad cubum ejusdem materiæ duplum, ita est pondus, ad pondus duplum; & ut utrumvis ad suum duplum, ita linea ad lineam duplam, Erit ergo ut quantitas ponderis ad longitudinem lineæ quæ ipsum repræsentat, ita quantitas ponderis dupli ad longitudinem lineæ duplæ ipsum repræsentantis. Sed pergo. [*Si comparetur* (inquit) *quoad rationem quadripondium & bipondium, Ratio est dupla*; *si Linea quadrupedalis ad pedalem, Ratio est quadrupla*; *quæ rationes ad invicem comparari possunt, nempe, hæc illius dupla est.*] Bene se habet. Sed quid si pro *quadripondio* & *bipondio* posuisset sex pondo & tripondium; & pro Lineis quadrupedali & pedali lineam 12 pedum & 3 pedum, quomodo argumentum ejus quadrasset ? Quomodo (inquam) rationem posteriorem prioris quanta pars esset ostendisset ?

B. Sic. Si comparatur quoad rationem sex pondo & tripondium ratio est dupla; si linea 12 pedum comparatur cum linea 2 pedum oritur ratio sextupla Quæ rationes comparari possunt, nempe hæc illius erit tripla.

A. Quid ita? rationem 12 ad 2 triplam esse censes rationis 6 ad 3 ?

B. Video. Nam ratio 16 ad 2 est tripla rationis 6 ad 3; sed fraudi illi & mihi fuit, quod in exemplo *Wallisiano* tum quantitates, tum rationes altera alterius dupla est; id quod contingit in progressione per dupla-

duplationem sola, aliâs non item. Sed miror cur hic dicit rationem 4 ad 1 duplam esse rationis 2 ad 1, cum ipse in Elencho multis & malis verbis contendat rationem illam dicendam esse non duplam, sed duplicatam.

A. Deinde causam reddens discriminis inter comparationem duarum quantitatum quoad differentiam & comparationem earundem quoad rationem, imperitiam suam ostendit etiam amplius. Nam cum ostendere deberet differentias *quantitatum* excessuum vel residuorum esse Homogeneas, ostendit tantum ipsa *quanta*, nempe excessus & residua, esse Homogenea. Nescit enim distinguere inter *quantum* & *quantitatem*. Secundo, cum dicat, *Ubi autem comparatio fit quoad rationem, quæ emerget ratio comparatorum genus non raro deserit, & transit in genus numerosum*, manifestè prodit harum rerum ignorantiam invincibilem.

B. Invincibilem?

A. Talem, inquam, quæ a nullius hominis alterius ignorantia superari potest. *Comparatio* (inquit) *non raro relinquit comparatorum genus*. Concedit ergo quod relinquit comparatorum genus aliquando. Sunt ergo *comparatio* & *comparatum* aliquando Homogenea. Præclarè pro gradu doctorali & officio Professoris Geometriæ.

B. Vide quæso (omissis quæ ille erravit) an ego sensum tuum de hac re satis capiam. Videris enim tu sentire Rationem Rationi, Geometricam Geometricæ, & Rationem Rationi, Arithmeticam Arithmeticæ homogeneam esse.

A. Ita.

B. Et Rationem Geometricam Arithmeticæ Heterogeneam.

A. Etiam.

B. Et in *quantis*, lineam lineæ, superficiem superficiei, & solidum solido Homogenea; sed altera alteris Heterogenea.

A. Nimirum, sic sentiunt omnes?

B. Sed quantitatem (in abstracto) cujuscunque rei quantitati (in abstracto) cujuslibet alterius rei, Homogeneam esse; ideoque linearum, Superficierum, Solidorum, Temporis, Motus, Vis, Ponderis, Roboris, Resistentiæ quantitates esse Homogeneas, etsi ipsæ res sint Heterogeneæ. Item, loquendo de iisdem rebus pluraliter, quantitates plurium linearum, superficierum, solidorum, temporum motuum, virium ponderum, resistentiarum esse Homogeneas, tum inter se, tum etiam Numero; Numerum autem non esse quantitatem, sed quantitates vel quanta, vel plura quæcunque. Nonne ita est?

A. Ita profecto arbitror.

B. Et ego; nam clarè & accuratissime quod res est, eloquutus es.

A. Quid autem volunt ista postrema verba *Et transit in genus Numerosum*?

B. Valent illa forte in homine Mathematico, idem quod tussis in Oratore.

A. Sed vide id quod sequitur; primo an sit verum; secundo, an consentaneum illis quæ aliàs dicere solitus est. Verba hæc sunt, *Et quidem cum duplum & dimidium, triplum & triens perinde pro Rationum nominibus habenda sint, dimidii autem & trientis notæ* $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ *numeris (fractis) accenseantur, quidni & dupli, tripli notæ* $\frac{2}{1}\ \frac{3}{1}$ *vel 2.3? Atque hac potissimum de causa ego totam doctrinam rationum Arithmeticæ potius quam Geometricæ speculationis esse autumo.*

B. Neque vera sunt neque dissentanea iis quæ sensit scripsitque pluribus in locis; nec tamen iis quæ in nonnullis aliis locis scripsit monitus consentanea. Plerumque enim, ut nunc, numerum fractum (sive Quotientem) eandem rem esse dicit cum ratione. Sed cum monitus ab *Hobbio* esset, numeros fractos, quotientesque omnes esse quantitates absolutas; rationem autem omnem quantitatem comparativam esse, negavit se dixisse, quotientem esse rationem ipsam, sed rationem esse *penes* quotientem. Tractatus ejus de *Arithmetica Infinitorum* totus eo fundamento nititur, quod quotiens sit ipsa divisoris ad dividendum ratio, ut quod $\frac{1}{3}$ sit ratio 1 ad 3.

A. Si ita est, neque totus iste tractatus ullius est pretii, neque is qui illum scripsit. Scripserat *Oughtredus* Cap. 6. *Clavis Mathematicæ* sub initium, quod quotiens divisoris ad dividendum rationem *indicat*, Verum in Editione Anglica invenio eo loco, quotientem *esse* rationem illam ipsam. Forte ergo Liber ille Anglicus ex versione est ipsius *Wallisii*.

B. Nescio, sed parum refert; non enim creditur *Oughtredum* sic vetti voluisse.

A. Pergens, *Comparationem quæ est quoad differentiam, ad quantitatem; at quæ quoad rationem, ad qualitatem referendam esse ait.* Nempe illam ad prædicamentum *quantitatis*, hanc ad prædicamentum *Qualitatis*. Sed quare? Quia ab *Euclide* definitur ποιὰ σχέσις. En hic κατηγορημανίαν Professorum Academicorum. Quid autem significat ποιὰ σχέσις?

B. *Habitudinem qualitativam* ut ille nunc vertit. Sed fateor me non intelligere neque quid sit *Habitudo*, neque quid sit *Qualitativa*. Dices fortasse tu hoc loco tussiisse etiam *Euclidem*.

A. Sequuntur deinceps duæ Paginæ in quibus interpretatur quid sint *Progressio Geometrica* & *Progressio Arithmetica, continua & interrupta*, Ubi non tam deest veritas quam abundant verba. *Cap.* 26 Continet solutiones quarundum quæstionum facilium per Progressionem Arithmeticam, sine demonstrationibus, ut apud vulgus Arithmeticorum Practicorum. *Cap.* 27. eadem & nonnulla alia ejusdem generis

per

per ſymbola demonſtrat, minus perſpicue, nec brevius quam poſſint demonſtrari oratione plena. Denique capite 28 eadem brevius ſcribit ſed obſcuriſſimè. Caput 29 continet Criticiſmos ſuper vocibus *Ratio, Rationalis*, ῥητὸν, ἄλογον, ἄῤῥητον, πολλαπλασίασις, *Quantuplum* &c, quorum Criticiſmorum aliquos ſuperiùs abſurdos eſſe oſtendimus. Itaque Caput hoc dimiſiſſem jam, niſi quod præterire non placet, quod dicit, *Euclidem quidem in Elemento decimo rationales appellare Lineas quæ potentia tantum ſunt commenſurabiles. Verum alibi non raro, obtinet rationalia tantum ea dici quæ & σύμμετρα ſunt; ut proinde ſit* ἄλογον *ſive* ἄῤῥητον, *atque* ἀσύμμετρον. Non enim puto aut *Euclidem* uſquam, aut Geometram alium quemcunque ἄῤῥητον & ἀσύμμετρον pro eodem uſurpaſſe. Non ergo illi credendum eſſe niſi Authorem & locum indicaverit. Quis enim qui *El.* 10. legerit neſcit infinitas numero eſſe quantitates, inter ſe commenſurabiles, quæ tamen ſint irrationales; propterea quod τῇ ῥητῇ arbitrarie ſumptæ commenſurabiles non ſunt. Pars hujus Capitis reliqua continet partem eorum quæ habet *Clavius* ad finem Elementi quinti de diſtributione rationum in ſuas ſpecies, nimirum *multiplicem, ſubmultiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem* &c. Præterire autem non poſſum verba ejus hæc, *Et quidem ipſæ fractiones nihil aliud ſunt quam rationes.* Nolo diutius neget ſe quotientem dicere diviſoris eſſe ad Dividendum Rationem. Neque hæc, *fractionis itaque Numerator & Denominator perinde ſunt atque rationis antecedens ad conſequens.* Quæ (etſi vera ſunt) verbis illius prioribus contradicunt. Neque hæc, *Sunt enim rationes non minus quam numeri veræ quantitates.* Nam ſi quantitates rationum effari cogeretur, neceſſarium eſſe videret, pro ratione æqualitatis ciphram ponere, id eſt confiteri quod ratio æqualitatis media eſt inter rationem quam habet quantitas ad quantitatem, & rationem quam habet privatio quantitatis ad privationem Quantitatis; & proinde quantitatem rationis quam habet æquale ad æquale eſſe nihil. Sequitur *Cap.* 30. de rationum compoſitione.

B. Differatur ſi vis, in diem craſtinum.

DIALOGUS QUARTUS.

A. Etiam hodiernus nobis sermo totus fere erit de *rationibus.* Capite præsente de rationum agit compositione, prout definitur ab *Euclide* (El. 6. Def. ult) *Ratio ex rationibus componi dicitur quando rationum quantitates inter se multiplicatæ efficiunt aliquam rationem.* In Græco τινὰ λόγον. Sic enim invenio in libro cujusdam Anonymi edita centesimo ab hunc anno in quo sunt definitiones & propositiones *Euclidis* omnes Græce scriptæ. *Wallisii* liber ut videtur loco hujus definitionis hanc habet *quando rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquas effecerint.* Quæ duæ lectiones sensu nihil differunt. Nam si duo termini unius rationis multiplicentur in duos terminos alterius rationis (id est, Antecedens in Antecedentem, & Consequens in Consequentem) orietur ratio ex duabus illis rationibus composita; vel quod idem est, orientur duæ quantitates quarum ratio æquatur duabus illis rationibus simul sumptis. Itaq;, compositio rationum est rationum (unius ad alteram) Additio, ut supra ostensum est. Quare compositio rationum de qua hic loquitur *Euclides*, est ipsissima rationum unius ad alteram Additio.

B. Manifestissime. Additio tamen hæc per multiplicationem perficitur.

A. Verum. At non per multiplicationem rationum, sed per multiplicationem terminorum, termini autem non sunt *Rationes* id est *Relationes* sed *Correlata*, quas Euclides hic appellat *Rationum quantitates.*

B. Ita est.

A. At *Wallisius* hæc non intelligit, ut per proxima ejus verba manifeste apparebit; sunt autem hæc, [*Quid per rationum quantitates intelligit Euclides non inter interpretes convenit: num scilicet ipsos terminos; num quod ex eorum comparatione provenit.*] Quæ proveniunt inde, nempe, a multiplicatione terminorum in terminos, habent quidem rationem ex propositis rationibus compositam, termini autem rationum componendarum esse non possunt.

B. Profecto *Euclidem* hoc loco Professor noster non intellexit. Neq;

(credo) Authorem ullum vidit qui quantitates rationum eo modo interpretatus sit.

A. Aliâs quoque animadverti eum quæ scripsit dubitans an essent vera necne, *quibusdam*, id est Authoribus Anonymis, in dividuis vagis attribuere. Sed quid tibi videtur oratio hæc, [*Utrumvis autem dicatur perinde est. Puta, si rationis* A *ad* B *termini in terminos rationis* α *ad*, β *respective, ducantur*; *nempe* A *in* α, B *in* β, *ut proveniat ratio* A *in* α *ad* B *in* β; *sive etiam ratio* $\frac{A}{B}$ *ducatur in rationem* $\frac{\alpha}{\beta}$ *ut proveniat* $\frac{A}{B}$ *in* $\frac{\alpha}{\beta}$ *perinde est*] Oratio quidem valde symbolica est, sed quam non intelligo. Nunquam enim multiplicari aliquid audivi, neque imaginari possum, nisi ut fieret vel multiplo major (nempe quando multiplicatio fit per numerum integrum) vel multiplo minor, (quando multiplicans est numerus fractus.) Non itaque intelligo quomodo aliquid multiplicari possit nisi per numerum integrum vel fractum. Veniam ergo mihi dabit *Wallisius* si non intelligam quomodo ratio A ad B duci possit in rationem α ad β. Rationem per numerum multiplicari posse scio, ut quando ratio multiplicata per 2 duplicatur, & per 3 triplicatur, & per 1 $\frac{1}{2}$ fit ratio sesquialtera.

A. In omni multiplicatione fit ut multiplicans ad unitatem, ita productus ad multiplicatum. Itaque quot continet unitates ratio A ad *B*, toties $\frac{A}{B}$ in $\frac{\alpha}{\beta}$ continet rationem α ad β sanine sunt qui sic loquntur? aut Professorem talem ferre æquum est Academicos, si ad illum expuendum satis haberent virium? Paulo post cum dixisset rationem duplam componi ex sesquialtera & sesquitertia (quod verum est si per rationem duplam intelligit rationem dupli ad simplum; alioqui falsum. Nam dupla ratio exponi per pauciores quam tres terminos non potest; ut nec ratio simpla per pauciores quam duos. Subjungit [*hoc est, ut loquuntur musici, ex Diapente & Diatessaron componitur Didapson.*] Verumne hoc?

B. Equidem Artis Musicæ Imperitus sum. Scio tamen ex diapente, & diatessaron componi diapason.

A. Sed a tono imo ad quintum quot numerantur toni?

B. Si extremi assumantur, quatuor cum semitonio.

A. A quinto ad octavum quot?

B. Si iidem extremi numerentur, tres cum semitonio. Intercedunt autem inter imum & quintum toni duo & semitonium; inter quintum & octavum, tonus & semitonium, & summus tonus duplo acutior est quam imus.

A. Quomodo autem conveniunt hæc cum compositione rationis sesquialteræ & sesquitertiæ ad faciendam rationem duplam?

B.

B. Nescio nisi rationum apud Musicos & Geometras diversa sit computatio.

A. Videri vult scriptor hic omnium artium peritus esse cum sit omnium quidem artium imperitus, duarum autem, quas profitetur, Theologiæ & Geometriæ imperitissimus. Quod habet deinde de rationis a ratione Ablatione (quam hic vocat ἀνυς πειρεσις rationis imminutionem) per Divisionem, respondit e contrario iis quæ habentur de rationum (quæ fit per terminorum multiplicationem) compositione, nec poterat id non videre.

Sed & aliter ratio a ratione detrahi potest, sine divisione. Nam si ratio 2 ad 3 detrahenda sit, ex ratione 4 ad 5, & fiat ut 2 ad 3 ita 4 ad aliam 6, erit ratio residua ratio 6 ad 5; ut expositis numeris 4,6,5, videre est. Nam subducta ratione 4 ad 6 (id est 2 ad 3) ex ratione 4 ad 5 relinquitur ratio 6 ad 5.

A. Lego.[*Utrum hæc Rationum compositio, additio judicanda sit, an multiplicatio, haud satis videtur apud Arithmeticos (vel etiam Geometricos) constare.*] Videtur his verbis respicere ad *Clavium* qui ad Prop. 23. El. 6. Contendit *compositionem hanc & detractionem non esse propriè Additionem & Substractionem*; *quia alias* (inquit idem *Clavius*) *esset totum æquale parti, & minus; & major proportio posset detrahi ex minore.* Quæ (ut videntur illi) absurda, pluribus exemplis ex opinione contaria deducit, ad finem El. 9.

B. Nescientibus rationis majoris ad minus, id est quantitatis ad quantitatem naturam diversam esse a ratione minoris ad majus, id est, privationis quantitatis ad privationem quantitatis, & mediam inter utramque esse rationem æqualium, satis absurdè sonat, majorem rationem a minore detrahi posse, & totam rationem ejusdem parte esse minorem. Sed si considerare vellent quod qui addit privationi privationem, quantitatem facit minorem; & qui privationem a privatione detrahit, quantitatem facit majorem, facile dici ferrent rationem majorem a minore, & totam a parte posse substrahi.

B. Erravit, scio *Wallisius* sed cum doctissimo *Clavio.*

A. Doctissimo quidem Jesuitarum, & Scriptore omnium seculorum diligentissimo. *Wallisius* autem non ut ille quæsibundus erravit, sed errorem illius amplecti satis habuit, quomodo quærendum ulterius esset ignorans. Attamen obtinuit (etiam contra sententiam *Clavii,*) ut vocetur *Compositio rationis* (propter vim, credo, etiam intus latentis veritatis) *Additio* potius quam *Multiplicatio.* Sed id ægrè fert *Wallisius, quia certum est* (inquit) *quantitates invicem multiplicari non addi.* Quasi diceret, *quia compositio rationum fit per multiplicationem terminorum, ergo compositio Rationum est Multiplicatio Rationum.*

num. Itaque paulo post, *designandam autem malim* (inquit) *per notam* x *Multiplicationis quam per* † *Additionis.* Adeoque quæ ex $\frac{A}{\alpha}$ & $\frac{B}{\beta}$ componitur ratio, scribenda est $\frac{A}{\alpha}$ x $\frac{B}{\beta}$, non autem $\frac{A}{\alpha}$ † $\frac{B}{\beta}$.

B. Certe non male scribi credo A ad α † B ad β pro compositione rationum A ad α & B ad β; quanquam pro multiplicatione fractionum male scriberetur $\frac{A}{\alpha}$ † $\frac{B}{\beta}$ & recte $\frac{A}{\alpha}$ † $\frac{B}{\beta}$.

A. Ita sane, si modo per symbola scribere omnino necessarium esset. Quod addit, [*Adeoq; tota illa de fractionum multiplicatione & divisione tradenda doctrina, de rationum continuatione & imminutione pariter intelligendum erit; sunt enim ipsissima eadem res,*] Promissio est Capitis 45 de fractionum & rationum rationibus ab initio usque ad finem absurdissimi. Deinde, *non idem* (inquit) *sonat ratio duplicata, triplicata* &c, *quod ratio tripla, dupla*, &c. Est in sono (fateor) aliquod discrimen, ut inter dissyllaba & quadrisyllaba, sed tamen idem significant. Nam quicquid duplicatur fit non minus duplum quam duplicatum; & quod subduplicatur (ignosce loquenti non latine) fit non minus dimidium quam subduplicatum. Et ut ratio 1 ad 4 est duplicata rationis 1 ad 2, ita etiam dupla est, nempe ratio defectus duplicata sive dupla.

B. Memini hæc eadem eodem modo explicata esse in Colloquiis superioribus, & vera esse satis sentio.

A. Quod autem ratio iterata non dupla dicenda sit, sed duplicata, confirmatum putat ab *Euclide*, qui perpetuo utitur hoc sensu vocibus διπλασίονα, τριπλασίονα, &c. non δίπλην, τρίπλην, neque διπλάσιον, τριπλάσιον; sed vim nullam habet; nam utitur διπλασίονι in Prop. ult. El. 9. ad significandum rationem simpli ad duplum. Non itaque verum est quod ea utitur perpetuo in sensu altero. Præterea fieri potest ut *Euclides* non satis ipse perspexerit rationis naturam; imo vero fieri aliter non potest, cum definierit rationem per ποιὰ σχέσις.

Capite 31, ubi tractat Progressionem Geometricam, Regulam affert generalem, qua terminorum omnium invenitur summa, nimirum hanc, [*si terminus ultimus per communem rationem multiplicetur (sive quod tantundem est, Progressio per unum adhuc gradum continuetur) atque inde auferatur terminus primus, & quod restat per numerum unitate minorem quam est communis ratio dividatur, prodibit progressionis summa.*] Quam regulam *deinceps* demonstraturum se esse dicit. Id autem quod deinceps legitur demonstratio non est, sed indicatio quod ita contingit esse in progressione numerorum ipsius arbitrio sumptorum. Neq; si in progressione omni numerorum tuo meove arbitrio sumptorum idem contingeret,

non

non tamen demonstratio esset; tum quia causa accidentis non apparet, tum etiam quia inductio particularium, nisi numero infinitorum, regulam non facit universalem.

B. Verba ejus hæc, *Regulæ demonstrationem deinceps exponemus*, non spectant ad id quod sequitur, nimirum *si in progressione adjuncta*, &c, sed ad id quod habetur Capite 33 ad Numerum 68 qui incipit, *si terminus maximus* &c.

A. Ergo vocem illam *deinceps* toties ubique, præsertim in libris Mathematicis, occurrentem Criticus Mathematicus doctor ille non intellexit.

B. Fortasse regulam tamen quam hic exposuit, illic demonstrabit.

A. Certone?

B. Puto. Verum si regulæ demonstrationem aliquam ejus ipse habes profer quæso.

A. Sciendum prius est, in omni multiplicatione esse ut Numerus productus ad numerum multiplicandum, ita multiplicantem ad unitatem.

B. Scio. Nam opus Multiplicationis aliud non est quam numerum invenire qui toties contineat multiplicandum quoties multiplicans continet unitatem.

A. Tenes. Sit ergo numerorum quotlibet continue proportionalium series A. B. C. D. in qua A sit minimus. Fit ergo B ex multiplicatione A per aliquem numerum integrum vel fractum, sit multiplicans primo integer quem tu vis.

B. Sit multiplicans 3.

A. Est ergo $3\,A = B$, & $3\,B = C$, & $3\,C = D$; & ut A ad *B*, ita 1 ad 3, ut tu modo ipse demonstrasti.

B. Concedo.

A. Sed in proportionalibus ut primum antecedens ad primum consequens, ita summa antecedentium omnium ad summam consequentium omnium.

B. Rectè.

A. Et in serie proposita A. B. C. D. omnes antecedentes sunt A. B. C, & omnes consequentes B. C. D. Quare ut 1 ad $A + B + C$, ita 3 ad $B + C + D$. Et proinde $3\,A + 3\,B + 3\,C = B + C + D$. Et subductis utrinque $B + C$, restabit hinc quidem D, illinc autem $3\,A + 2\,B + 2\,C$. Habemus ergo æquationem unam $D = 3\,A + 2\,B + 2\,C$; & sublato utrinque A, æquationem alteram $D - A = 2\,A + 2\,B + 2\,C$. Quare diviso numero dato $D - A$ per 2, quotiens erit $A + B + C$; cui adjunctus datus D dat summam quæsitam.

B. Nihil clariùs. Sed sit jam multiplicans numerus fractus, puta $\frac{1}{2}$.

A. Erit igitur B $= \frac{1}{2}$ A; & *C* $= \frac{1}{2}$ B; & D $= \frac{1}{2}$ C; & proinde ut A ad B, ita 1 ad $\frac{1}{2}$. Item ut A † B † C ad B † C † D, ita 1 ad $\frac{1}{2}$. Quare B † C † D $= \frac{1}{2}$ A † $\frac{1}{2}$ B † $\frac{1}{2}$ C. Et sublatis utrinque B † C, fit æquatio hæc D $= \frac{1}{2}$ A † $\frac{1}{2}$ B † $\frac{1}{2}$ C; & rursus, sublato utrinque A, fit hæc, D−A $= \frac{1}{2}$ A † $\frac{1}{2}$ B † $\frac{1}{2}$ C. Quare diviso D−A per $\frac{1}{2}$, erit quotiens A † B † C. Datur autem D. Cognita ergo est summa simul omnium.

B. Multo magis perspicua & amæna demonstratio hæc est quam illa Professoris nostri Algebrica.

A. Quidni? An comparanda est *Algebra* cum Methodo Analytica? sed de demonstratione *VVallisiana* videbimus inferius.

B. In numeris proportionalibus, terminorum ulteriorum investigatio apud nostrum ærumnosa est. Sed lege quæ sequuntur.

A. [*Progressionis cujusvis inchoatæ terminum ultimum a primo satis remotum invenire.*]

B. Operatio, inquam, quam docet per notationem exponentium, & iterationem, quam requirit, operis, ita ut nisi palpando progredi non liceat, & ignorantia finis, odiosa res est. Ostende igitur illius rei Methodum certam.

A. Sint continue proportionales A. B. C. D. E, Communis autem multiplicans sit M. Sunt igitur ipsis A. B. C. D. E. æquales A. M A. M M A. M M M A. M M M M A, (Si modo sumantur eodem ordine) singuli singulis. Vides ergo progressionem generari ex multiplicatione termini minimi A, primo per multiplicantem communem M; & deinceps, per ipsius multiplicantis potestates ordine ascendentes, nempe, per M M quadratum, M M M, Cubum, M M M M quadrato-quadratum, *&c.*

B. Video.

A. Et esse quot termini tot potestates ascendentes, demptis duabus; nam M non est potestas sed Radix. Multiplicationes autem tot sunt quot sunt (dempto uno) ipsi termini. Jam datis duobus tantum terminis primis datur M, nimirum dividendo B per A. Quæritur autem, verbi gratia, terminus post A quartus. Scribe M quater, ut M M M M. Quia ergo datur M, datur quoque M M M M. Datur autem & A. Datur ergo M M M M A terminus quæsitus, nempe quartus incipiendo a *B*. Multiplicationes enim una pauciores sunt quam termini.

B. Teneo. Et siquidem terminus postularetur centesimus, deberet M multiplicari in se nonagesies novies, & productus in A, ut haberetur terminus centesimus.

A. Ita est; Sed labor aliquanto minor erit, ubi multi sunt progressionis termini, si multiplicatio fiat per potestates altiores. Nam si multiplicans sit 3, non est necesse ascendenti ad Cubicubum, Multiplicationem incipere a 3; possumus enim incipere a Cubo ejus 27, vel ab alia altiore potestate cognita.

B.

B. Sed cur tu pro multiplicante ponis M, cum *Wallisius* ponat ubique R.

A. In causa certè non est quod libeat ab illo dissentiri, sed ne alios, (ut ille) inducam in errorem. Ego enim pono M literam *Multiplicantis* initialem, ille R literam initialem *Rationis*. Nam in progressione (exempli causa) 2. *6*. 18. concedimus ambo communem multiplicantem esse 3 sive R, sive M appellatur. Ille autem hoc amplius rationem 2 ad *6* esse 3. Et propterea quem numerum ego communem multiplicantem voco, appellat ille communem rationem; unde fit ut nonnulli illius secuti Authoritatem, rationem putent esse numerum, nimirum quotientem; quod est erroneum.

B. Imò verò absurdum.

A. Video hic symbola ab illis quæ hactenus usus est diversissima,

B. Non sunt illa Symbola Algebrica, sed literæ Arabicæ.

A. Legitne ille Arabica, ut Clericus?

B. Nescio. Sed a viro doctissimo & illius linguæ peritissimo accepta libro suo visum est illi Arabica hæc inserere. Nam Progressionis Geometricæ *exemplum inquit elegans est & vetustum & forte omnium primum*. Ostenditur autem hoc exemplo in quàm immanem summam per paucas duplicationes excrescit unitas.

A: Ostenditur præterea legisse illum Edwardi primi *Statutum de mensuris Anglicanis*, ut eo transcripto videretur etiam peritus juris. Nam absque his, quæ ad scientiam Arithmeticæ nihil pertinent, Caput hoc 31 vix contineret duas Paginas.

B. Datis terminis primo & ultimo, quomodo invenitur quem quis postularet terminus intermedius?

A. Dato quidem numero terminorum facillimè. Divido enim ultimum per primum, & quotiens erit potestas aliqua ex ascendentibus; nempe si ultimus fiat a multiplicatione quadrati in terminum primum, erit terminus ultimus tertius; si fiat ex cubo in primum, erit ultimus quartus, & sic deinceps; dato ergo terminorum numero cognosco quota sit in ascendentibus potestas illa ex cujus multiplicatione in terminum primum fit ultimus. Diviso ergo termino ultimo per primum, innotescit potestas illa cujus Radix propria est communis multiplicans. Exempli causa, si sit progressio data 3. *6*. 12. 24. 48. *96*. & communis multiplicans M. Progressio hæc 3. 3 M. 3 M M. 3 M M M. 3 M M M M. 3 M M M M M. Eadem erit quæ est data. Datur autem numerus terminorum *6*. Fit ergo *96* ex potestate quarta in 3, id est, ex Multiplicantis surdo-solido in 3. Diviso ergo *96* per 3 habetur multiplicantis surdo-solidum 32, cujus radix propria nempe 2 est communis multiplicans. Quo multiplicante cognito, quilibet terminus intermedius statim invenitur, ut qui fit ex 3 in 2, vel in 4, vel in 8, vel in 16, &c.

B. Methodus ut quæ procedit ab ipsa terminorum generatione recta est.

A. Capite 32 loquitur de origine & usu Logarithmorum (ut ex primis ejus verbis manifestum est) imperitè. Verba hæc sunt [*est autem ea quam superiore capite tradidimus regula (de terminis remotioribus intermediis quasi per saltum inveniendis) maximi quidem momenti Regula; non tamen ob eum quem jam ostendimus illius usum, quam ob insigniora quæ inde defluxerunt commoda. Ex hoc enim fundamento dependet Mirificum illud Logarithmorum Inventum.* Næ ille Nepperi inventoris & Briggii Logarithmorum inventorum excultoris, clarissimis ingeniis non multum tribuit, qui principium tam facile inventionis assignat quam est ex datis primis terminis progressionis inventio ulteriorum. Præterea, quod per eam Regulam inveniri putet Logarithmos terminorum intermediorum falsum est. Nam e contrario qui hac utuntur regula non Logarithmos per terminos progressionis, sed terminos progressionis inquirunt per Logarithmos datos, nimirum, per potestatum ascendentium indices Arithmetice Proportionales?

B. Unde ergo illi in mentem venire potuit tam insigne inventum.

A. Observaverat ille inter duas quantitates extremas (cum mediæ interponi possint tum Geometricæ tum Arithmeticæ numero infinitæ) quanto plures interponuntur, tanto minus Geometricas & Arithmecas inter se differre. Inde (nec aliunde) venit ei in mentem, quod valde multis mediis interpositis in Ratione Geometrica, totidemque in Ratione Arithmetica, alteræ ab alteris non differunt nisi in notis numericis a prima adeo remotis, ut postremæ (retentis prioribus) sine damno calculi possint negligi, & per consequens, ea quæ per Multiplicationem & Divisionem solebant supputari, per Additionem & Substractionem satis accurate expediri. Quæ deinceps scribit *Wallius* de Logarithmorum usu pauca sunt & transcripta ex initio libri de Logarithmis editi a Briggio.

B. Videamus jam ea quæ continentur in Capite 33 de Progressione Geometrica per symbola.

A, Toto hoc Capite difficultas præter eam quam faciunt ipsa symbola fere nulla est. Itaque unius tantum Theorematis demonstrationem examinabimus, in qua regulam demonstrare conatur qua vulgò utuntur qui quærunt summam Progressionis Geometricæ datæ. Ait ergo ad Art. 68, *Si terminus maximus in communem rationem ducatur; & ex producto auferatur terminus minimus, residuumque per rationem communem unitate minutam dividatur, quotiens exhibet totius progressionis summam; hoc est* $\frac{\mathrm{UR}-\mathrm{A}}{\mathrm{R}-1}=\mathrm{S}$.

B. Ita. Nam U, est terminus Ultimus. R communis multiplicans *A* terminus minimus.

A.

A. Pergamus. [*Quis* (inquit) *hanc primus invenerit regulam plane ignoro, & quidem utut ea plerique utantur, non memini tamen me illam uspiam demonstratam vidisse; cum tamen vel maxime demonstratione indigeat. Nobis ergo hanc libuit demonstrationem comminisci.*]

B. Lege demonstrationem ipsam.

A. [*Ponamus* (inquit) *numerum terminorum* $T = 4$. *Adeoque* $A R t = A R^4$. *Et dividenda proponatur* $A R^4 - A$ *per* $R - 1$. *Cum igitur sit* $R) A R_4 (A R^3$.] Non amplius intelligo quid sibi vult.

B. Dicit, si quantitas facta sit ex multiplicatione *A* in *R*, & producti in 4, Quotientem esse factum ex *A* in *R* & producto in 3.

A. Non vult hoc sed aliquid aliud.

B. Nescio, sed aliis in locis symbola similia id significant quod dixi. Ut *Pag.* 172. *l.* 23. ubi sic loquitur, *quoniam* $F) A B F (A B$ *scribo in quotiente* $A B$. Hoc est $A B F$ diviso per *F* Quotiens erit $A B$.

A. Recte quidem illud; falsum ergo hoc, $R) A R_4 (A R_3$. Nam $R) A R^4 (A^4$ verum est. Si enim A_4 in R facit $A R_4$, etiam $A R_4$ divisus per R dabit quotientem A_4.

B. Videtur hic lapsus esse aliquis vel festinantis calami, vel Typographi.

A. Sive lapsus sit, sive arcanum aliquod artis symbolicæ, vim certe habet omnem demonstrationis hujus ulteriorem examinationem præcidendi. Transiliemus Caput 34. Ut quod nihil aliud est præter earundem demonstrationum breviorem & fere totam symbolicè scriptam synopsin cæcam; Caput 35. est Elementi quinti *Euclidis* demonstratio *A*rithmetica. Quod quidem Elementum symbolicè cuilibet & suis symbolis transcribere facile est.

B. Quid? Demonstrationes ejus nihilne aliud sunt præter transcriptiones,

A. Non id dico, sed cum facile sit demonstrationes *Euclidis* una cum definitionibus ejusdem scribere symbolicè, facilius est Theoremata ejus inferre ex assumpta sine demonstratione Hypothesi. Nam cum totum illud Elementum 5 ex definitione dependeat *ejusdem rationis*, ille neglecta definitione *Euclidis*, loco ejus substituit hanc. *Æqualitas sive Identitas Rationis est æqualitas sive identitas quotorum*. Deinde subjungit, *Puta si sit* $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$, est & a. α :: b. β. *& contra; quod nobis erit definitionis loco.* Similiter Rationem majorem & minorem definit sic. *Ubi quotus major est, ibi ratio major; ubi minor, minor est.*

B. Propositio est, Definitio non est. Quanquam autem Definitio non sit, sed propria passio, vera tamen erit Demonstratio.

A. Erit, modo ipsa passio fuerit prius demonstrata.

B. Demonstrata est Capite 33 per propositionem *Euclidis* 6, 16; nempe,

nempe, *si quatuor quantitates fuerint proportionales, factum ab extremis æquatur facto a mediis, & contra.* Sed hoc *Euclides* in lineis, *VVallisius* in numeris demonstrat.

A. Quid opus erat? Nam numerorum rationes omnes accommodari possunt Lineis, quanquam contra non omnes rationes linearum competant numeris. Sunt enim lineæ multæ inter se incommensurabiles, numeri autem incommensurabiles esse non possunt. Sed videamus ipsam Demonstrationem. Capite 32, quo amandamur nihil est quod eo respicit.

B. Quære in Cap. 33, quod totum est de continuè proportionalibus. Lege prop. 21.

A. [*Continue proportionalium, si duorum quorumvis rectangulum per terminum primum dividatur, prodibit terminus, cujus index sive distantia a primo æquatur illorum indicibus simul sumptis.*] Quod verum est. Dum autem propositionem ejus hanc 21 percurro, intelligo quid significant symbola prop. 68. ejusdem Capitis. Nam *R*) *A R*⁴ (*A R*³ hoc significant, quod diviso numero qui fit ex *A* in 4 & ex producto *A R* multiplicato per potestatem cujus index est 4, quotiens erit factum ex A R in potestatem cujus index est 3. Quod non negatur. Sed hoccine est demonstrare, nimirum rem ita obscure enuntiare ut a nemine intelligi possit nisi qui non modo illius norit symbola sed etiam methodo naturali idem potest demonstrare?

B. Etsi propositionem hanc veram esse ex tua perspexi demonstratione, nescio tamen an illius demonstratio sit legitima. Lego enim symbolica ista ut pueri *Homerum*, quibus ad singula vocabula adeundum est Lexicon. Illud autem A R4 ne in Lexico quidem est.

A. Sit quidem vera demonstratio; at quomodo transferri potest ad proportionales quæ nec continuæ sunt, nec in eadem serie continuarum, quales sunt 2. 4:: 3. 6. vel 3. 9:: 4. 12. ubi distantiis & indicibus locus non est? Nondum ergo propositionem illam *Eucl. 6. 16.* demonstravit.

B. Redeamus ad *Cap.* 35 unde frustra digressi sumus.

A. Imo transiliamus & illud & proximum illi 36. Credo enim Elementum quintum ex Hypothesi quam ille assumpsit aut recte demonstratum esse, aut si vitium aliquod irrepserit (præter ipsam scriptionem symbolicam) non illius imperitiæ, sed Typographo vel transcriptori tribuendum esse. Est autem Cap. 36. ejusdem Capitis 35 Brachystenographia.

A. Caput 37 unicum habet problema hoc, datis tribus proportionalibus invenire quartum; quæ est regula aurea. Cujus constructio hæc est, *tertius multiplicetur per secundum, & productus dividatur per primum.* Quæ vera & vulgo recepta est. Demonstrans autem sumit (quod

Capite

Capite 25 loco definitionis nullo jure habuit) *ubi quotientes sunt æquales, ibi rationes sunt eædem, & ubi quotiens major est ibi major ratio, ubi minor, minor.*

B. Si sint duo quotientes æquales, exempli causa, numero 4 (qui est quotiens divisi 20 per 5) æqualis sit 4 (quotiens divisi 12 per 3) dicit ergo 4 ad 4 esse in eadem ratione; quod non intelligo, nam aliquid deest. Forte hoc vult, eandem esse rationem 20 ad 5, & 12 ad 3; vel $\frac{20}{5} = \frac{12}{3} = 4$.

A. Impropriè quidem loquutus est, verum autem est quod demonstrare voluit, nec fecit. Postquam enim dixisset, cum sit A. α:: B. β. subjungit, *hoc est* $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$. Quod nondum constat, sed erat prius demonstrandum. Argumentatio ex concessa Hypothesi satis procedit. Sed demonstratio non est.

B. Regula Aurea quomodo aliter demonstrari potest?

A. Eo modo quo demonstratur ab *Euclide Elem.* 9. 19. Vel sic; numeri plani sunt rectangula sub rectas quarum partes aliquotæ numerantur. In duobus autem rectangulis æqualibus, ut latus unum primi ad latus unum secundi, ita latus reliquum secundi ad latus reliquum primi. Quare in numeris planis æqualibus est ut factor unus primi ad factorum utrumvis secundi, ita coefficiens secundi ad coefficientem primi. Si dentur ergo tres numeri *A*, *B*, *C*, & quæratur *D*, quia factus ex *A* in *D* æqualis est facto ex *B* in *C*, divisoque *A D* per *A* proveniet *D*, etiam diviso *B C* per *A*, proveniet idem *D*; quæ est Regulæ Aureæ demonstratio naturalis. Nullus enim numerus rerum æqualium (quales sunt partes aliquotæ) multiplicatus per numerum, producit numerum alium quam numerum rerum numeraturum, propterea quod ratio æqualitatis (cum ipsa non sit quantitas) non addit neque detrahit quantitati rationum quam habent ipsi numeri.

B. Satis clarè. Sed putaram potuisse fieri aliquanto brevius.

A. Nescio, nec credo; melius est autem quod probandum susceperis pluribus verbis manifeste demonstrare, quam paucioribus non demonstrare. Sequitur Aureæ Regulæ Praxis, id est, exempla operationis vulgaria. Deinde exemplum aliud ubi quæritur *quota hora sit Athenis quando est Oxoniæ octava*, cujus praxis nulla esse potest, nisi iis qui sciunt doctrinam Sphæræ & Circulorum quos in illa finxerunt Astronomi. Ii vero nulli sunt qui non regulam hanc ante didicerunt. Non erat ergo Arithmetici hoc docere, cujus est omnia docere abstractè a rebus numeratis, id est, universaliter. Deinde quod monitum lectorem voluit *ne quando fraudi sit, quod ea tanquam proportionalia habeantur quæ proportionalia non sunt*, ad Arithmeticam non pertinet, sed ad Philosophiam, ut ex suo ipsius exemplo est manifestum, *Posito*

(in-

(inquit) *quod pondus gravitate sua motum duobus temporis momentis 20 pedes descendat ; quæratur quot pedes descensurum sit momentis 10. Si fiat multiplicatio numeri tertii per secundum, atque divisio producti per primum, prodibit quartus 100. At ille numerus quæsito non satisfacit.*

B. Nonne ergo Regulæ Aureæ definitio tradita initio hujus Capitis falsa est?

A. Minime. Sed numerus qui in una quæstione secundus est, in alia debet fortasse esse tertius. Præterea, quæritur aliquando, datis tribus numeris, quis sit ad tertium in ratione primi ad secundum duplicata vel triplicata, pro ratione rerum numeratarum, ut in hac ipsa quæstione, ubi gravia non percurrunt spatia in eadem ratione, sed in duplicata momentorum temporis; ut a Galileo demonstratum est in Dialogis de motu; id quod *Wallisius* nesciit. Qua ratione descendunt gravia, vel fluida e vase effluunt, non est Arithmetici docere, sed Physici.

B. Sed qui obiter Physicum Theorema docet Arithmeticus, an culpandus est?

A. Non. Parergon est si doceat; sin libro Arithmetico inserat, neque demonstrat neque conetur demonstrare (quod fecit ille) ineptum est. Quæ sequitur per tres paginas est præcedentium symbolica scriptio. Deinde ostendit quomodo multiplicari (in Regulæ Aureæ operatione) possint inter se duæ quantitates Heterogeneæ, vel una per alteram dividi possit; puta quomodo pondus in lineam multiplicari, vel per eam dividi possit; dicitque utrumque fieri per reductionem utriusque quantitatis ad numeros; & quidem rectè.

B. Sed nonne fieri potest etiam per reductionem ad lineas, cum ipsi numeri ad lineas reduci possint? Præterea fieri potest ut pondus ponderi sit incommensurabile. Tunc autem reduci ad numeros non possunt, ad lineas possunt.

A. Commodiùs certè reducuntur ad lineas. Sed ille quanquam non satis, non male tamen fecit.

B. At ille *Hobbium*, quia rationem ponderum & linearum mediantibus lineis permutavit acerrime increpat in Elencho.

A. Tanto ille nequior. Venimus jam ad Auream Regulam Inversam sive Reciprocam quam docet *Cap.* 38. *Ubi expositis* (inquit) *tribus quantitatibus quæritur quarta reciproce proportionalis.*

Demonstrationem Regulæ hujus deducit ab eo quod in rectangulis æqualibus latera sunt reciprocè proportionalia. Quod quidem rectè fecit, sed necessario. Fateatur ergo hic, quod negavit ante, Arithmeticam a Geometria, non contra, Geometriam ab Arithmetica dependere. Cætera transeo cum sint trita. Sequitur *Cap.* 30. de Aurea

Regula

Regula compoſita, quam primò per duas operationes, deinde per unicam abſolvit, ſed non demonſtrat. Nam ratiocinatio ejus ex eo dependet, quod regula compoſita ea eſt, qua datis quinque numeris invenitur ſextus, ad quem ita ſe habeat tertius, ut factus ex compoſitione rationum primi ad tertium ſibi cognominem, & ſecundi ad quartum ſibi quoque cognominem. Ratio enim effectuum componitur ex rationibus cauſarum ſingularum unius ad ſingulas cauſas alterius ejuſdem generis, ut hominum ad homines,& menſium ad menſes. Itaque ut exemplo utar quod ipſe adfert, *ſi 4 Academici in 3 menſibus expendant 20 libras; quot libras expendent Academici 6 in menſibus 12.* Numeri dati ſunt quinque. 4 Acad. 6 Acad 3 menſes. 12 menſes. 20 Lib. Scribantur ergo $\frac{4}{6}\,\frac{3}{12}$ Ratio jam quæ oritur ex compoſitione rationum 4 ad 6 & 3 ad 12 eſt ratio 12 ad 72. Quare ut 12 ad 72 ita eſt 20 ad quæſitum. Multiplicatis ergo 72 per 20 fit 1440, qui diviſus per 12 dat quæſitum 120.

Caput 40 de regula ſocietatis, nihil habet in neutram partem ſingulare; itaque tranſiliri poteſt. In Capite 41, ubi tractat de numeris fractis, noto primo hæc verba, ſupponit Arithmetica *unitatem, ſive unum, numerorum primum eſſe*, quod eſt falſum. Supponit hoc *Wallisius*, non ſupponit Arithmetica; nam unitatem *Euclides* numerum eſſe negat. Sed quæſtio hæc non magis ad Arithmeticorum quam ad vulgi cognitionem pertinet. Et quid de ea ſentiendum ſit a nobis ſatis diſputatum eſt ſupra ad Cap. 4. Secundo, verba hæc, [*Unum aliquod in partes dirimendum vero aliquo numero deſignari non poteſt.*] Nam & hoc falſum eſt; quia tres quartæ partes unius cujuſlibet rei non minus verus eſt numerus quam tres quartæ partes unius octonarii. Et ſimpliciter tres partes ſunt æquè verus numerus ac tria tota. *Sed pro veris numeris haberi* (inquit) *non ſolent.* Neque hoc concedo

B. Sed probat ex eo quod *ſub numeri appellatione apud* Euclidem *non cenſetur.*

A. Quia numerus hominum ſub appellatione numeri apud *Euclidem* non cenſetur, ideone ſequitur quod numerus hominum non eſt numerus? Cur autem numerus hominum magis eſt numerus, quam numerus partium unius hominis?

B. Neſcio, ſed perge.

A. Hoc quoque animadverſione dignum eſt. Quod dicit [*ex imperfecta & impoſſibili radicum extractione oriri numeros ſurdos* $\sqrt{3}$. $\sqrt{5}$, &c.] Numerus enim nullus eſt qui non eſt in progreſſionis hujus Arithmeticæ ſerie 1, 2, 3, &c, ſi continuetur quantum poteſt.

B. Nihil manifeſtius. Sed ignoſce.

A. Quidni? Condonamus ei non modo hanc ſed omnem ejus (quantacunque ſit) ignorantiam; ſed falſa corrigentibus liceat vera

investigare. Fractionem mox laboriose definit esse *quæ unius integri pars indicatur, quæ ad totum illam rationem habet quam habet fractionis Numerator ad Denominatorem.*

B: Male hoc. Ni enim cognitum prius sit quid sit *fractio*, cognosci non potest quid sit *Numerator*, aut *Denominator fractionis.*

A. Poterat breviùs veriùs & pleniùs naturam fractionis explicasse sic, *Fractio est numerus partium. Propria quidem unius; impropria vero plurium quam unius.*

B. Accuratè.

A. Deinde verba hæc, [*Sed & hinc etiam patet Rationum & Fractionum identitas, sive Affinitas maxima,*] illorum sunt qui quid accuratè dicendum sit ignorant. Vox enim illa *Affinitas* Mathematicorum non est. Si ratio & fractio eadem res sit, quid opus est loqui de affinitate? si diversæ, quomodo affines?

B. Quia fractio rationem indicat dividendi ad divisorem.

A. Horologium indicat horam; quare ergo non est Horologii & Horæ vel identitas vel saltem maxima affinitas? Non ita ratiocinari solent Mathematici, Porro hæc, *Quippe nil aliud sunt fractiones quam rationum denominatores*, accurata non sunt, nam fractio denominat numerum certum certarum partium ut $\frac{3}{4}$, id est, tres partes quartas, qui numerus est absolutus; ratio autem quantitas est non absoluta sed comparativa; Non ergo denominat fractio rationem, sed ostendit quantitatem numeri absoluti ut 3, comparati cum numero absoluto, ut 4.

B. Non video quomodo hæc negari possunt. Neque quicquam illum juvat quod deinceps habet, nimirum, *quod Aurea Regula rationum rationes comparat*; & *quod opus sit Arithmetici non minus rationum quam numerorum rationes contemplari.*

A. Caput 42 est de Additione & Subductione Fractionum. Quod de Additione dicit earum Fractionum quarum idem denominator est, verum est, & quidem demonstratum esset, nisi medium ipsum quo utitur ipse alias negasset. [*Numeri* (inquit) *2 & 3 simul additi constituunt 5, quæcunque res illæ sint quæ numerantur, puta sive integra sive partes.* Et *qua ratione 2 & 3 homines, sunt 5 homines, &c. eadem plane ratione 2 & 3 semisses sunt 5 semisses.*] Cum ergo 2 & 3 homines sunt verus numerus; etiam 2 & 3 semisses, vel etiam 2 & 3 centesimæ sunt verus numerus; sunt autem fractiones; est ergo fractio verus numerus. Quod cum ille in præcedentibus semper negaverit, propositum non demonstravit. Ostendit paulo post, duarum fractionum diversos habentium denominatores, ad duas alias quæ denominatorem eundem habent, Reductionem. Exemplo utitur $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ quas fractiones ad eundem denominatorem reduci demonstrat, nempe ad fractionem hanc $\frac{4}{12} \dagger \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$ & quidem (cum aliis plerisque) rectè. Adeoque mirum est

quod

quod non viderit fractiones & rationes quantum differunt. Nam si ratio $\frac{1}{3}$ (id est juxta illum ratio 1 ad 3) addatur rationi $\frac{1}{4}$ (id est, ut illi placet) rationi 1 ad 4, summa erit ratio $\frac{7}{12}$, id est, ratio 7 ad 12, quod manifestè falsum est. Si enim ratio 1 ad 3 addatur rationi 1 ad 4, summa erit ratio 1 ad 12, id est secundum *Wallisium* $\frac{1}{12}$. Itaque æquales inter se erunt $\frac{7}{12}$ & $\frac{1}{12}$. Vel componendo rationes eo modo quem docet *Euclides*, erunt, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Similiter fractio $\frac{1}{2}$ addita fractioni $\frac{1}{2}$ duplicatur & fit 1. At ratio 1 ad 2 addita rationi 1 ad 2 duplicatur & fit ratio 1 ad 4. Sunt ergo per illum qui fractionem & rationem pro eadem habet re, $\frac{1}{4}$ & 1, inter se æquales, Quod vides quam sit absurdum. Sed absurda quæ in ipsis numeris satis patent, descripta symbolis, symbolorum imperitos (quæ est utilitas symbolorum) facile fallunt. Neque si non fallerent, quicquam valerent symbola nisi ad obscuritatem (alioqui) clarissimis inducendam: sequuntur *Cap.* 43. de fractionum Multiplicatione & Divisione, & Caput 44 de fractionum reductionibus; in quibus ut nihil falsum, ita nihil novum reperimus, neque in demonstratis neque in demonstrationibus. Caput ultimum Epilogus est quo præcedens opus Arithmeticum se dicit absolvisse. Doctrinam enim de rationum rationibus traditam esse ait in Doctrina Fractionum; quod quam recte factum sit audisti modo. Et siquidem ipse huic Doctrinæ Theoremata ulla superstruxisset, absurda ea esse intellexisset ipse.

B. Non puto. Nam hæc Doctrina fundamentum est totius fere tractatus illius quem inscripsit *Arithmeticam Infinitorum*; quem tractatum una cum tractatibus de *Conicis sectionibus*, & de *Angulo Contactus* mecum attuli ut examines. Nam illos examinari cupio.

A. Examinabo. Sed ad *opus Integrum Arithmeticum* desunt adhuc *Regulæ Alligationis* & *falsæ positionis, quarum altera* (inquit) *tum aliis de causis, tum quod illa non adeo frequentis usus sit, altera sine magno dispendio post introductam Arithmeticam speciosam careri possit.* Quod utrumque falsum est. Nam & regulæ alligationis apud Mercatores usus est satis frequens; & regula falsæ positionis cum dependeat ab hoc Theoremate, *Ut unum falsum suppositum, est ad errorem a se natum, ita alterum falsum suppositum, est ad errorem itidem a se natum, demonstrari potest sine Algebra.* Demonstratio longiuscula est. Sed legere eam poteris in fine libri quinti *Bartholomæi* Pitisci de Triangulis.

B. Legam.

A. Sed deest etiam ad *opus Arithmeticum integrum*, methodus inveniendi radicem cujusque potestatis datæ. Item ars Analytica, nisi illa Arithmeticæ pars vel regula aliqua non sit, quæ an recte prætermisit, item an ea quæ tradidit recte tradidit tuum est considerare.

B. Restat adhuc percurrendus Tractatus Elenchticus contra *Meybomium de proportionibus*, una cum dedicatione. Dedicatio paginas habet 50; opus dedicatum 62.

A. Scio. Sed non est illa tam dedicatio quam laborantis lapsum suum in Conicis corrigere miserabilis labor & perplexitas.

B. Scripserat *Prop. Sect. Con.* 47. *in paraboloide cubicali diametros esse sibi invicem Parallelas*; Quod Robervallius illi falsum esse indicavit. Lege ergo ut sciamus si quid afferat nunc quod sit rectius.

A. Non est tanti tota Geometria, sunt enim paginæ sequentes duodecim quibus quæritur Æquationis nescio cujus radix *q* adeo stigmosa symbolisque scribillata, ut nulla humana patientia examinari possint. Illas igitur abhominans prætereo; præsertim cum Diametrum Paraboloidis cubici ne sic quidem inventam esse dicat. Sed æquatio illa cujus Radix est *q* (*q* autem quid sit nescio) illum vexaverat; itaque homo vindictæ amans ulcisci parat. *Nempe* (inquit) *vexanda adhuc est æquatio illa quæ nos vexavit hactenus, ut tandem quid certi prodat.* Assimulansque Proteo Æquationem, ea occasione usus, versus ex Homer. Odys. plusquam duodecem inseruit. Deinceps autem resumptam eandem æquationem vexat frustra, nec quidquam adhuc certi prodit *Proteus*.

B. Transeamus ergo ad ea quæ habet contra *Meybomium*.

A. Prætereo illa quæ ex Meybomio affert proprium inventum extollente (nam & *Wallisius* non minus gloriose, & multo magis contumeliosè scribit quam Meybomius) & illud quod non satis distinguat Meybomius inter τὸ ἀπὸ & τὸ ὑπὸ, quia propero ad ea quæ scribit de Natura Rationum. Primum igitur quod reprehendit *Wallisius* est quod *Euclidis* illud (in Definitione Rationis) ποιὰ σχέσις vertit per *certa quædam relatio*, propterea quod ποιὸν *qualitatem respicit*. Si quid peccavit hoc loco Meybomius, peccatum, est quod illud quod *Euclides* insignificanter dixerat id voluit dicere accuratius. Verteret *Wallisius habitudinem qualitativam*, quanquam *qualitativa* vox latina non sit, neque intelligibilis. Habitudo autem in qualitatibus nihil aliud est quam habitus, id est facilitas agendi consuetudine acquisita. Hoc inquam ita est Latine. Ergo secundum *Wallisium* ratio est *duarum magnitudinum Homogenearum ea quæ secundum quantitatem est, facilitas agendi consuetudine acquisita.* Qua definitione quid potest esse magis ridiculum? non respexit *Euclides* ad prædicamentum qualitatis, in voce ποιὰ, sed ad vocem in enuntianda rationum similitudine vulgo usitatam οὕτως ἔχει (ut in præcedentibus notavimus) atque inde definit rationem per *aliqualem habitum*, seu (quod hoc loco idem est) per habitum quendam (subaudi) nescio quem; rectius ergo Meybomius rationem definivit quam aut *Wallisius* aut ipse *Euclides*. Quid enim ratio aliud est quam magnitudo unius quantitatis quatenus ad aliam comparatur?

B. Nihil.

A

A. Sed vide *Wallisii* super hæc scholiastæ verba Latine ab ipso versa, subtilitatem, Verba sunt hæc. *Est autem alia quæ dicitur relatio secundum excessum & defectum.*

B. Quid? Aliane ratio an alia Relatio?

A. Ἄλλη σχέσις id est *alia habitudo.*

B. Cur ergo non vertit per *alia habitudo*, sed per *alia relatio?*

A. Quia ratio quæ hic innuitur ea est quam vulgo vocant rationem Arithmeticam, quam *Wallius* negat esse rationem. Itaque homo subtilis sententiæ suæ convenienter locum vertens, maluit *Relationem* dicere quam *Habitudinem*, quæ vox est in definitione rationis. Deinde paulo infra prævisso quod non inepte quærere quis posset *an insit in ratione qualitas aliqua*; respondet, *ut figurarum magnitudo ad quantitatem spectat, ita figurarum species spectat ad qualitatem.* Quasi aliud in Figuris compararent Geometræ præter quantitates; aut esset aliqua ratio magnitudinum quæ esset qualitas. Illæ ipsæ ratio & inclinatio propter quas figuram qualitatibus accenseri poscunt, ambæ sunt quantitates, nec ut *quales*, sed ut quantæ considerantur a Mathematicis. Quod Meybomius *quantum* a *quoto* non distinguat, ab *Wallisio* recte reprehenditur. Deinde quod *Meybomium* reprehendit, quia in locis aliquot veterum ubi emendatio debebat fieri per διπλασίονα, emendat per διπλάσιον merito fecit. Sed quod Meybomius idem significare censuerat διπλασίων & διπλάσιος recte censuit, *VVallisius* autem id negando, imperitum se ostendit Linguæ Grecæ, etiam ejus qua utuntur Geometræ, ut in verbis ab ipso recitatis manifestum est, οὐ λέγει ὅτι δύο λόγοι τοῦ ἑνὸς διπλάσιοι εἰσι, ὃ τοῦτο μὲν γὰρ, ἀλλὰ ὅτι ὁ λόγος ὁ ἐκ τῶν δύο διπλασίων ἐστί; *id est non dicit duas Rationes unius esse duplas, Quod tamen est verum, sed Rationem ex duabus compositam esse duplicatam.*

B. Non capio. Vellem professor noster ostendisset quare duæ rationes æquales compositæ non faciunt rationem unius duplam, & quare duplum simpli non sit ejusdem simpli duplicatum.

A. Sed harum vocum alium sensum esse dicit apud Mathematicos.

B. Credo.

A. Et ego, etsi non semper, tamen sæpissimè ita esse. Id quod ex eo contigit quod (ut dixi ante) non ausi sunt Rationem minoris ad mediam duplam esse dicere Rationis ejusdem minoris ad maximam. Quæ tamen magnitudine dupla est, quamquam numero Rationum dimidia; ut ratio 1 ad 2 dupla est Rationis 1 ad 4 quantitate, etsi contra Ratio 1 ad 4 dupla sit, si spectes rationum numerum. Id quod sæpe alias dixi, nimirum, in Rationibus minoris

ad

ad majorem, quæ sunt Rationes Defectus, multiplicatio Rationum quantitatem Rationis minuit, Divisio auget. Deinde, quod *Meybomius* dicit, *Si rationum magnitudo sit exploranda, ille major est cujus termini longius inter se distant*, falsum est; nam 1 ad 2 majorem habet rationem quam 1 ad 4 cum tamen termini 1 & 4 longius inter se distent quam 1 & 2. Quod etiam vidit *VVallisius*. Rursus Meybomius reprehendit Definitionem *Eucl. Elem.* 5. 6. ut falsum; non rectè; poterat tamen ut non definitionem; nam potest demonstrari.

B. Et demonstravit *Hobbius*.

A. Vidisti jam quam sunt naturæ Rationum de qua litigant ambo ignari.

B. Reliqua ergo ne examines. Attuli autem mecum alterum illum librum ejus de *Angulo Contactus*, de *Sectionibus Conicis*, & de *Arithmetica Infinitorum*, ut cum perlegeris excutiamus sicut hunc.

A. Libet autem antequam discedas videre utrum rectè reprehenderit *Mersennum*. *Mersennus* in Cogitatis Physico-Mathematicis, *Proportio* (inquit) *æqualitatis, nihili similitudinem refert, Proportio majoris inæqualitatis attollitur supra nihilum. Proportio minoris inæqualitatis deprimitur infra nihilum.* Contra hæc ea quæ affert *VVallisius* continentur omnia his verbis. *Qui simplum dicit, non ille rem nullies apponi intelligit, sed semel. Et qui subduplum poni dicit, non aliquid auferri dicit, sed saltem semissem poni.* Quæ satis illos quidem redarguerent qui simplum, vel semissem, vel trientem nihil esse dicerent vel quantitatem habere nullam, sed contra *Mersennum* qui nihil horum dicit, sed semissem, trientem &c, aliquid esse & quantitatem positivam esse concedit, nihil faciunt. Nam illius verbis, non semissem neque trientem &c, aliquid esse negatur, sed tantum semissis sive trientis &c, ad integram rationem quantitatem habere, id negatur. In legendis ergo Mathematicis non nimis est acutus.

B. Sed nosti juxta sententiam *Wallisii*, semissem, & semissis ad totum rationem, eandem esse rem.

A. Scio. Vidimus jam in hac parte operis Mathematici, Professoris vestri quot sunt errores, scilicet plures quam censor ullus quantumvis severus in omnibus scriptis omnium Mathematicorum editis invenire potest.

B. Id quidem nescio. Verum si de omnibus simul doctrinæ partibus judicium facies, non mediocriter doctum esse existimabis. Theologus enim est, & Logicus, & Physicus, & Metaphysicus, & Politicus, & Ethicus, & Peritus Juris Romani & Anglicani. Præterea linguas novit

novit Hebræam, Arabicam, Teutonicam, Gallicam, Italicam, Armoricam (quarum ſpecimina & criticiſmos vidiſti in hoc libro) & præterea Symbolicam, quæ, ut lingua quædam univerſalis eſt inſtar omnium.

A. Vidimus quidem videri velle hæc noſſe, neque quicquam aliud præter errores & nugas noſſe.

B. Liber hic alter quem examinaturi ſumus videbitur tibi fortaſſe melior. Vale.

DIALO-

DIALOGUS QUINTUS.

A. Bene advenis, sed te expectabam heri.

B. Venire non potui. Tu vero tanto plus habuisti otii librum quem tecum reliqui perlegendi.

A. Perlegi, nisi quod tractatus de *Sectionibus Connicis* Capita aliquot quæ symbolis nimium impedita erant transilui; & tractatus de *Arithmetica Infinitorum*, cum Capita prima & reliquorum omnium fundamenta falsa esse invenissem, cætera legi quidem sed examinare nolui. Capite primo de Angulo contactus occasio declaratur controversiæ de natura ejus inter Clavium & Peletarium, nempe *Pr.16.Ele.3.* Euclidis, una cum demonstratione ejusdem. Propositio quidem Græcè & Latinè (Græcè in eorum forte gratiam qui Latine nesciunt) Demonstratio Latine tantum repetitur. In secundo controversiam illam ostēdit diremptam ab Euclide non esse. Nec mirum, Euclides enim de futura super verbis ejus tanto post tempore inter Peletarium & Clavium controversia ne somniavit quidem. Capite tertio controversiam intimius (ut ille parum latinè loquitur) aggreditur; Anguli plani definitionem afferens hanc, *Angulus* (inquit) *planus est mutua κλίσις, seu inclinatio duarum linearum in plano sese tangentium & non in directum positarum.*

B. Definitio quidem Euclidis est, sed Anguli plani natura ubi explicatur.

A. In ipsa definitione.

B. At non agnosco; nam repugnat iis quæ idem scripsit Euclides *Def.* 5. *Elem.* 11. Ibi enim definit *rectæ lineæ ad planum inclinationem item plani ad planum inclinationem esse Angulum acutum.* Cum ergo omnis inclinatio ad planum, sit inclinatio ad lineam in plano, erit (per hanc definitionem) omnis Angulus Acutus.

A. Sed non videtur vox *Inclinatio* eodem sensu accipienda esse hic atque in *Elem.* 11. Scias ergo nonnullos esse qui etsi a positis Principiis nunquam non rectè Ratiocinentur, ipsa tamen Principia non satis fæliciter semper ponunt. Oportuit prius definitum esse quid sit Inclinatio

 clinatio

clinatio quam per *Inclinationem* definiisset Angulum planum. Quod enim non fecerit in causa fuit quod *Wallisius* frustra se torserit in vocibus κλίσις & ἀκλισία. Sapit enim definitio Euclidea plus quam satis de vulgi imaginatione Anguli, cum dicant hoc vel illud *non factum esse in Angulo*. Sic quoque accipit *Clavius*, cum contra *Peletarium* disputans, Angulum rectum majorem esse dicit quam est Angulus semicirculi, ut totum quam pars; deceptus eo quod superficies aliqua intercipi videtur inter Arcum & Tangentem. Itaque naturam Anguli vulgi more, in arcta quadam superficie consistere arbitrabatur. Quod est falsum.

B. Imo vero adeo absurdum, ut nemo illud unquam apertè dicere ausus sit; quanquam inhærente illa falsa imaginatione id dixerint ex quo inferri possit.

A. Audiamus *VVallisium*. [*Et quidem ipsæ lineæ concurrentes quamvis totæ forsan inclinentur ad invicem, Angulum tamen non alibi quam in ipso puncto concursus formant.*] Nonne hinc sequitur ipsa puncta formare Angulum?

B. Planè. Et siquidem punctum sit (ut vult *VVallisius*) nihil, duo nihila formabunt Angulum.

A. Videntur mihi duæ lineæ etiamsi non concurrant, si tamen eadem regula qua generantur productæ concursuræ sint, Angulum efficere.

B. Hoc quomodo sit possibile vix intelligam, nisi sciero quis sit quem tu appellas Angulum.

A. *Angulum simpliciter* (excluso Angulo Contactus) *appello lineæ quæ Circulum describit conversionis totius portionem. Anguli autem quantitatem, quantitatem arcus quolibet tempore descripti.* Itaque qui dicunt Angulum duabus rectis e centro contineri, non superficiem, sed arcum contineri intelligunt, vel intelligere debent.

B. Ita quidem censeo, nec *Wallisius* aliter sentire potest, quicquid tuendæ existimationis causa dixerit in contrarium.

A. Itaque Angulum contactus Angulum simpliciter dictum non esse ex eo probandum erat quod recta circulum tangens nullum abscindit arcum, *VVallisius* autem hoc partim ex Pelitario, partim ipse, ex eo probare vult, Capite 4, quod lineæ illæ non sunt una ad alteram inclinatæ, quamquam quid sit Inclinatio adhuc nesciatur. Inclinationem autem in Angulo contactus nullam esse, satis quidem, sed operationibus a motu circulari deductis tandem demonstrat. Ex quo nihil aliud efficitur præterquam quod Angulus contactus non sit Angulo simpliciter dicto Homogeneus. Quod quidem verum est, ut tamen verum quoque sit quod Angulus Contactus sit verus Angulus, idemque Quantus. Capite 5, idem probat Pelitarius ex *prop.* 1. *Elem.* 10. Sed

Angulum

angulum omnino non esse aut nullam habere quantitatem non probat. Cap. 6. respondetur Argumenta ad Clavii. Ego(dicit *Clavius*) *Angulos illos ejusdem esse generis negavi hac solum de causa, quod Angulus contactus quantumvis multiplicatus Angulum acutum rectilineum superare nequeat*. Quod quidem argumentum firmum esset, si modo Angulus Contactus esset Angulo rectilineo Homogeneus. Est ergo Homogeneus aut nullus. Nullum esse respondet *VVallisius*. Quorsum igitur dicitur *Angulus* contactus, potius quam *punctum* contactus? Sed neque ille nullum esse demonstravit, sed tantum nullum rectilineum. Quod autem *Angulus* contactus Angulus sit,& quantus, verum Heterogeneus, post demonstrabitur. Rursus *Clavius*, *ut Angulus planus efficiatur, sufficit* (inquit) *duas lineas in plano ad invicem inclinari, non autem requiri ut se mutuo secent*, Quod *VVallisius* non negat, inclinari negat. Quid autem est inclinatio si duæ lineæ tunc non inclinantur ad se invicem, cum a diversis regionibus utræque concurrunt ad idem punctum? At *Inclinatio* in definitione Anguli non sumitur ut in Elemento 11, pro Angulo rectilineo acuto, ita ut Angulus præter acutum nullus sit.

B. Quin arcus & tangens ad se inclinentur dubitari non debet. Non ergo solvit argumentum *Clavii*.

A. Atqui hæc sunt præcipue quæ disputantur Cap. 6. ubi neuter ob ignorationem naturæ *Angulorum* veritatem constanter tenet, sed modo hic, modo ille incidit in absurda. Capite 7. probare conatur *Wallisius Anguli* simpliciter & *Anguli* contactus ὁμογένειαν. [*Primo* (inquit) *quæ mutuo possunt vel addi vel auferri ea non sunt heterogenea*. Conceditur. *At Angulus contactus* (*siquidem sit Angulus*) *& recto auferri potest ut maneat Angulus semicirculi internus,& recto adjungi potest ut fiat Angulus semicirculi externus*.] Percepistin' hujus argumenti vim?

B. Ita. Si, inquit, superficiem illam quæ se ingerit inter tangentem & arcum auferas, remanebit *A*ngulus quem efficiunt diameter & arcus. Quod per se manifestum est, quia aufertur pars a toto.

A. Ergo per *VVallisium* uterque *A*ngulus tam semicirculi quam contactus est superficies.

B. Id quidem quanquam sit absurdum manifestè sequitur.

A. [*Secundo, duæ* (inquit) *quantitates quarum altera est major, altera minor sunt Homogeneæ*. Conceditur. *Sed Angulus contactus* (*siquidem sit Angulus*)*& Angulus quivis rectilineus ejusmodi sunt quantitates*;] id est, quarum altera altera potest esse major vel minor, Negatur.

B. Sed probat ex *prop*. 16. *Eucl. Elem*. 3.

A. Nego hoc quoque. Nam per illam propositionem probatur hoc solum, intercedere inter tangentem & arcum superficiem aliquam, non autem angulum aliquem.

B. Tertio [*Angulus* (inquit) *Semicirculi ad angulum rectum rectilineum certam habet & determinatam rationem.*]

A. Conceditur.

B. *Habebit ergo rationem ad reliquum*, id eſt, ad angulum contactus.

A. Negatur. Non eſt enim angulus contactus pars reliqua anguli recti rectilinei, neque dempto angulo ſemicirculi ex angulo recto rectilineo relinquitur angulus contactus. Verum autem eſt dempta ſuperficie intercedente inter diametrum & arcum, quod relinquitur ſuperficies quæ intercedit inter arcum & tangentem; quam ſuperficiem putavit *VVallisius* eſſe angulum. Caput 8. Teſtimonium habet *D. Hen. Savilii*. Is vero Quadratum & Circulum Homogenea eſſe oſtendit; de angulo contactus, eo loco, ne verbum quidem. Sed paulò inferius de hac re dubitaſſe eum fatetur ipſe *VVallisius*. Nec ſi aliter ſenſiſſet, ullius apud Mathematicos qui omnia rationibus, Authoritatibus nihil penſitant, momenti eſſet. Capite 9. Continetur primo Argumentum Peletarii deductum ex gratis aſſumpto Lemmate, *Angulos ſemicirculorum*, (id eſt quos faciunt diametri cum ſemiperimetris) *eſſe æquales*. Quod veriſſimum quidem eſt, ſed omnino idem quod probandum erat. Inde autem demonſtrare, quod angulus contactus non habet quantitatem, impoſſibile eſt. Sequitur quidem inde angulum contactus nullam partem eſſe anguli qui continetur a Diametro & Circumferentia, non autem quod non habet ſuam ſibi quantitatem; nec quod angulus contactus unus altero non poſſit eſſe vel major, vel minor, vel æqualis. Ea autem quæ per Lemma ſuum tria enuntiantur, non ſunt de angulo contactus, ſed de ipſo contactu; quaſi eſſent qui ipſum contactum angulum eſſe dicerent.

B. Sed per contactum intelligi vult contactus angulum.

A. Credo. Sed quod non loquutus ſit accuratè in cauſa erat quod naturam anguli non perſpexerit. Verum lemma illud Peletarii Cap. 10. demonſtrare fruſtra conatur *VVallisius*. Nam etſi veriſſimum ſit, tamen niſi ex definitione anguli ſimpliciter dicti, ſive rectilinei, demonſtrari non poteſt.

B. Quomodo autem lemma illud demonſtrabis tu?

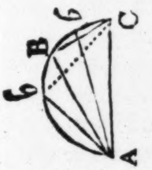
A. Quantitas anguli rectilinei (per definitionem meam) eſt quantitas quam habet arcus interceptus inter duos radios comparata ad quantitatem totius perimetri. Sed angulus factus inter Diametrum & tangentem nullum intercipit arcum. Eſt ergo quantitas anguli contactus nulla pars quantitatis anguli rectilinei. Quare arcus ſemicirculi ſolus abſque angulo contactus rectus eſt.

B. Si angulus contactus nulla pars ſit ejus qui efficitur a Tangente & Diametro, quare dicitur angulus? & quomodo dici poteſt quantus?

A.

A. Dicitur angulus, quia formatur a duabus lineis in communi puncto concurrentibus. Quantus dicitur propterea quod unius anguli contactus quantitas, potest esse vel major vel minor quam quantitas alterius. In quinque paginis quæ faciunt Cap. 10. ad probandum quod angulus semicirculi est rectus, affert sex demonstrationes, quarum ne una quidem satis firma est; ideoque Caput undecimum totum occupat objectio contra Cap. 10. & ad objectionem responsio. Quod non fuisset necessarium, si fuissent legitimæ demonstrationes ejus. Elige quamlibet & quam putas firmissimam.

B. Eligo quartam, ubi cum angulum constituisset in semicirculo rectum *A B C*, supponit *A B* super terminum Diametri moveri circulariter ad terminum oppositum. Quanto ergo eo motu minuitur perpetuo angulus ad *A*, tanto augetur angulus ad *C*. Itaque angulus in circumferentia perpetuo servatur rectus, quare & rectus erit quando *A B* est in ipso Diametro in C. Itaque angulus semicirculi in *C* erit rectus.



A. Ita quidem, cujus crus alterum semicirculum tangat in *C*. Sed si crus alterum sit arcus, non est necesse, non inquam necesse est propter vim hujus demonstrationis, nisi & angulus factus ab *A B* & arcu *B C* sit etiam rectus; quod, quanquam verum sit *Clavius* non concedet. Capitibus 12 & 13 Argumenta quæ adducit, nihil amplius probant quam quod angulus contactus anguli rectilinei non est pars. Quod non negatur. Capite 14. Argumenta explicat desumpta ex optica *Vitellionis* (ut ne hujus quidem philosophiæ partis ignarus esse videretur) sed ab illis nihil aliud derivari potest præterquam quod angulus contactus angulo rectilineo nihil addit. Quod quidem fieri potest ex eo quod quantitati nihil addit non modo quantitas nulla, sed etiam quantitas Heterogenea. Postremo, Cap. 15. respondet ad *Clavii* quædam Corollaria. Quorum unum est, quod *potest aliqua quantitas continue & infinite augeri, & tamen augmentum illius quamtumcunque minus semper erit decremento hujus*. Quod quidem eo sensu quem hoc loco habere debet, dictum est planè absurdum. Alterum, *transiri posse a minore ad majus vel contra, & per omnia media nec tamen per æquale*. Quod est absurdissimum. Hiccine fuit qui adeo superbè insultaverat *Jos. Scaligero*, quod dixerat *latera 12 Dodecagoni majora esse Perimetro circuli circumscripti*; quod quidem absurdum erat, sed non tam, quam monstrum hoc Clavii, propter quod Geometriam ipsam non magni facerent homines non Geometræ. At notat hoc non ut absurdum *Wallisius*, sed ut falsum.

B. Restat, (quoniam angulo contactus quantitatem tribuis, sed

anguli

anguli rectilinei quantitati Heterogeneam) ut ostendas quare sit Heterogenea, & qua mensura quantitates duorum Angulorum contactus possint mensurari. Primo autem quid est illud esse *Homogeneum*? Et quid est esse *Heterogeneum*?

A. *Homogeneæ* quantitates sunt quarum mensuræ applicari possunt una ad alteram ita ut congruant. Itaque cum linea lineæ applicari possit, & superficies superficiei; & solidum solido applicari concipi potest, erunt quantitates eorum Homogeneæ. Item quia quantitas temporis per lineam mensurari potest, & linea lineæ applicari potest erit quantitas temporis quantitati lineæ Homogenea.

B. An tempus & linea congruere inter se possunt?

A. Non. Nec id dixi, sed mensuram lineæ, & mensuram temporis quæ ambæ sunt lineæ congruere posse. Etiam Motus & Ponderis quantitates ad lineas reduci possunt,& proinde eorum quantitates Homogeneæ sunt.

B. Quid ergo Homogeneum non est? Nam solidum & Linea ad numeros reduci possunt; est autem numerus numero Homogeneus.

A. Numerus numero, si quæ numerantur sunt Homogenea, Homogeneus est; alioqui Heterogeneus, ut duæ lineæ & duæ superficies. Nisi enim numeri ex Unis Homogeneis constent, ipsi Homogenei non sunt. Numerus enim omnium rerum est communis, et lineæ sunt numerus linearum, quadrata numerus quadratorum; fractio numerus partium. Præterea, angulus rectilineus cum angulo rectilineo congruere potest, cum possint per arcum circuli ambo mensurari; arcus autem cum arcu ejusdem circuli congruere potest. Anguli autem contactus mensura cum Auguli rectilinei mensura congruere non potest, quia angulus rectilineus non mensuratur per lineam nisi circularem; & quidem quatenus circularem, mensura autem anguli contactus est linea recta quatenus recta.

B. Quomodo id fieri potest?

A. Circulum non modo circino describi posse nosti, sed etiam continua flexione rectæ. Ut enim recta linea frangi potest in Polygonum quotvis laterum æqualium; ita flecti potest (id est, in omni parte frangi) in Polygonum laterum numero infinitorum.

B. Scio.

A. Prior generatio lineæ circularis est generatio ab initio, nulla præexistente linea recta; posterior est præexistentis rectæ mutatio in curvam circularem.

B. Ita est.

A. Sunt autem curvarum aliæ magis, aliæ minus curvæ. Itaque & curvitati omni sua est certa quantitas.

B.

B. Est.

A. Et curvitati circulari sua certa quantitas.

B. Etiam.

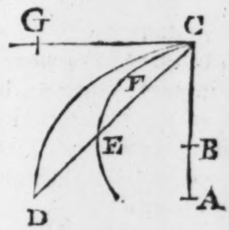
A. Si quæratur autem duorum arcuum æqualium in diversis circulis, uter sit magis curvus, quomodo respondebitur ?

B. Nescio, nisi quod mihi quidem videatur minor circulus esse magis curvus. Nam legi in Galileo quod arcus circuli, si radius esset infinitus, esset linea recta.

A. Ego vero omnium circulorum perimetros, si totas spectes dico æque esse curvas; item partem perimetri unius similem parti alterius esse æque curvam; nec dissentio a Galileo. Nam si in perimetris diversorum circulorum arcus sumpseris æquales, magis curvus est is qui sumitur in perimetro minore. Id quod voluit Galileus. Verum si sumpseris arcus proportionales æquè curvi sunt; ut quorum curvitates oriuntur a totidem rectæ lineæ fractionibus, in partibus totidem (quæ sunt numero infinitæ) proportionalibus.

B. Manifesta hæc sunt, sed non mihi videntur satis respicere ad angulum contactus.

A. Dico igitur quantitatem anguli contactus esse quantitatem curvitatis perimetri quam contingit. Vide figuram hanc, ubi centris A & B descripti sunt duo circuli C D, C E contigui in C. Ducta autem recta C D secans circulum alterum in E, alterum in D, non modo ostendit quod similes arcus C E, C D æqualem habent curvitatem, sed etiam quod illa curvitas distributa sit in majori circulo per majorem arcum quam in minori; contra vero partem C E in minore perimetro magis curvam esse quam pars perimetri majoris, puta C F, ipsi arcui C E æqualis, idque in ratione Chordæ majoris C D, ad Chordam minorem C E, id est in ratione radii A C ad radium B C.



B. Nihil clarius. Sed quid hæc ad angulum contactus?

A. Ducatur ergo tangens C G, determinabitque illa quanto arcus C E propter curvitatem suam in arcu minore magis recedit a Tangente quam arcus C D, propter curvitatem eandem in arcu majore.

B. Video reliqua. Recta a puncto contactus cum secet omnes circulos interiores transeuntes per C proportionaliter, determinabit quantitatem curvitatis arcuum æqualium in unoquoq; circulo sumptorum

torum; & proinde earum curvitatum est mensura; quæ mensura cum sit linea recta, C E D, partes ejus omnes applicatæ sibi invicem æquales cum æqualibus congruent. Quare anguli contactus inter se Homogenei sunt, habentque quantitatem, & sunt angulis rectilineis Heterogenei. Perge modo.

A. Hactenus tractatus *de Angulo contactus*, quem vides ejusdem esse farinæ cum opere ejus Arithmetico integro.

B. Progrediamur ergo ad tractatum *de Sectionibus Conicis*, qui distinguitur in tres partes; quarum prima proœmium habet & Prop. 20. Secunda, Prop. 23. Tertia, Prop. 6. In proœmio plus promittit quam post præstat. Supponit autem Prop. 1. *planum quodlibet conflari ex infinitis Parallelogrammis æqualibus quorum quidem singulorum altitudo sit totius altitudinis pars aliquota infinite parva.* Prætereo, quod si planum parallelogrammum non sit, conflari ex parallelogrammis non potest. Prætereo item quod planum finitum ex infinitis parallelogrammis conflari non potest. Ille autem hoc voluit conflari planum ex infinitis numero parallelogrammis, idem putans esse infinita parallelogramma & infinita numero parallelogramma. Id quod notare volo hoc est, quod supponat partem aliquam aliquotam esse infinite parvam; nam est contradictio in adjecto, non minor quam si quis diceret curvam aliquam lineam esse rectam. Cum enim dicit partem aliquotam, dicit quantitatem in quantitates divisibilem perpetuo divisibiles. Si ergo pars aliquota sit infinite parva, erit illa nihil. Et quia pars aliquota ad totum est ut 1 ad numerum, erit quoque, ut nihil ad quantitatem, ita unitas ad numerum. Nonne hoc æque absurdum est ac illud *Clavii, transiri posse a minore ad majus nec tamen per æquale?* Et multo magis absurdum quam illa aut Scaligeri conclusio aut Orontii?

B. Ita est. Neque rectè dicit Consentaneum esse hoc Geometriæ indivisibilium Cavallerii, qui per indivisibilia intelligit indivisa.

A. Falsum quoque est quod dicit planum quodlibet conflari ex infinitis parallelogrammis æqualibus. Neque enim trianguli constant ex parallelogrammis, sed ex Trapeziis; neque ullum aliud planum ex parallelogrammis constat præter parallelogrammum. Neque sequitur ex doctrina *Cavallerii*, sicut ex doctrina hac *Wallisii*, *nullam esse cujuscunque plani altitudinem*. Prop. ergo prima nihil egit.

B. Dicit fortasse idem sentire se quod Cavallerius, nempe esse altitudines suorum parallelogrammorum infinitè parvorum non prorsus nullas, sed valdè exiguas.

A. Quid ergo opus erat dicere *infinite parvas*, cum suffecisset dixisse non consideraturum se illorum altitudines ut quantitates. Deinde

prop.

Prop. 2, ubi demonstrare vult triangulum totum æquale esse omnibus pasi parallelis, supponitque triangulum divisum esse in parallelogramma altitudines habentia infinitè parvas; & quia illa parallelogramma sunt Arithmetice proportionalia, concludit (& quidem rectè) ea simul omnia toti triangulo esse æqualia; animadverto, quod si altitudines nullæ sint, ut is supponit, nulla erit proportio Arithmetica, nisi o, o, o, o, &c, sint Arithmeticè proportionales. Neque erunt parallelogramma toti triangulo æqualia; nisi infinities nihil possit esse æquale alicui rei; neque si per *infinite parvum* intelligit *exiguum*, necesse erat facere illa exigua. An in ratione Arithmetica non fuissent aut toti, non æqualia, si altitudines supposuisset quascunque? Tota ergo hæc propositio unicam habet demonstrationem, quæ poterat decuplo esse brevior. Itaque quæ sequuntur Prop, 3, 4, 5, 6, etsi veras habeant conclusiones, vitiosas continent ratiocinationes. Easdem tamen conclusiones nemo non novit, nec rectè non potest, & breviter demonstrare. Prop. 7. præter terminorum, quibus utuntur scriptores Conici definitiones, unicam habet demonstrationem, & monita quædam ne non rectè intelligeretur, illi qui non satis accurate loquitur planè necessaria. Propositio quam demonstrat hæc est. *Planum coni sectionem efficiens, si unum ex parallelis in cono circulis secet secundum rectam ipsius diametro perpendicularem, etiam reliquos illi parallelos circulos secabit secundum rectas, quæ ipsorum Diametris parallelis sunt perpendiculares*, quæ per se perspicua, nec nova est. Hanc ergo propositionem ut non falsa continentem (quod deberi puto absentiæ symbolorum) dimittamus.

B. Expectabam hic ut demonstraret circulorum omnes in Cono perimetros perimetro basis parallelas coni totius superficiei esse æquales; ut antè minuta parallelogramma triangulo toti.

A. Et ego. Sed id forte oblitus prætermisit nam propter 2am, Arith. Infin. non potuit videre falsiitatem. At Prop. 5 eadem illa methodo ostendit semiparabolæ planum ex infinitis constare lateribus quadratorum Arithmeticè proportionalium; & rectè quidem modo latus quadrati concedamus esse parallelogrammum.

B. Sed illud falsum est.

A. Scis autem ex falsis verum, etsi non contra ex veris falsum concludi posse. Idem eodem modo Prop. 9, probat de Conoide parabolico, quod constat ex infinito numero planorum Arithmeticè proportionalium. Quod concedimus ut verum, sed non ut novum, nec hic demonstratum, nisi illa plana sint Cylindru i. Quod tu iterum dices esse falsum.

B. Quidni?

A. Propositio 10 est, quod *Pyramidoeidis Parabolici & plani per*

 Axem

Axem secantis communis sectio est parabola. Quod est falsum, nisi addat quod sectio transire debeat per angulos oppositos. Cum enim Conoidis parabolici planique per axem communis sectio sit parabola, impossibile est ut idem contingat in pyramidoide aut ulla alia figura basem habente rectilineam nempe polygonum.

A. Prop. 11. figuram exhibet aliam novam quam appellat Cuneum parabolicum, qui nihil aliud est ut mihi videtur quam simpliciter Cuneus, nimirum prisma cujus basis est parallelogrammum, acies autem linea recta. Quod quidem prisma est aggregatum Triangulorum quorum quidem bases simul omnes faciunt parallelogrammum, vertices autem lineam rectam. Quæ est figura tecti domus.

B. Temerè hæc.

A. Sequuntur rursus inventa aliena. Itaque Prop. 12. ostendit quid sit *latus rectum*, sive *Parameter*, sive *juxta quàm possunt* ordinatim Applicatæ. [Parameter hæc, *non uspiam* (inquit) *vel in coni sectione vel in ipso Cono realiter existit, sed sola imaginatione suppletur.*] Quod est falsum, natumque ex imperitia hominis in Connicis semidocti.

B. Quænam autem est recta illa in Coni sectione realiter existens parameter?

A. Dicam. Describe parabolam (non nunc sed cum fueris apud te) & comprehende parallelogrammo, cujus unum latus tanget parabolam in vertice & faciet angulum cum Diametro. Angulum illum, ducta recta secans lineam parabolicam alicubi, dividat bifariam, & compleatur parallelogrammum, cujus unus Angulus est in vertice, alter est in linea parabolica. Erit autem parallelogrammum illud vel quadratum vel Rhombus. Hujus latus est parameter. Meditare, inquam, hoc tecum, & judica an Parameter magis sit imaginaria quam Diameter, vel alia quævis linea. Est autem ubique ut intercepta Diameter ad illam, ita illa ad ordinatim applicatam. Id quod *Wallisius* enuntiat per *Quantuplo major est vel minor &c tantuplo &c*; quæ voces *Quantuplum* & *Tantuplum* neque Latinæ sunt, neque quicquam significant.

B. Miror certè alienæ Latinitatis reprehensorem tam acrem, toties barbare scribentem non sensisse.

A. Fieri potest ut linguæ Latinæ usum aliqua ex parte labefactaverit studium nimium Linguæ Arabicæ.

B. Non puto.

A. Proximo loco quamlibet parabolam cuilibet cono aptari posse (puto nam obscure) demonstrat; neque enim nova res est, neque difficilis Prop. Decem hujus partis primæ reliquæ, ubi de Ellipticis & Hyperbolicis Pyramidoidibus & Cuneis, & de Ellipsium & Hyperbolarum

rum parametris *imaginariis* loquitur, eodem laborant vitio. Vides ergo ſectiones Conicas quatenus in ipſo Cono conſideratas quam parum intelligit. Quod attinet ad conſiderationem earundem ſectionum extra Conum, ea ſcribit quæ (quia non intelligi) reprehendi non poſſunt; nam Theoremata (excepto quadrageſimo ſeptimo, quod ſuum eſt & falſum) ab aliis vere demonſtrata ſunt, *Wallisii* autem demonſtrationes propter denſitatem ſymbolorum non apparent. Neque quicquam habent, etſi veræ eſſent, præter Analyſin alienæ Syntheſeos. Ea igitur tranſilio, properans ad tractatum *de Arithmetica infinitorum*, quo nihil unquam quiſquam vidit in Geometria turpiùs.

B. Incipiamus ergo ab Epiſtola Dedicatoria.

A. Non eſt neceſſe. Nihil enim continet præter ordinem ſuarum ipſius cogitationum quibus perductus eſt ad abſurdam illam ejus circuli quadraturam: Neque in tractatu ipſo ulterius legam quam ad prop. 41. quia priores has pro fundamento ponit omnium quæ ſequuntur. Prima propoſitio eſt *Lemma* vel potius **Problema** hoc, *Si proponatur ſeries quantitatum Arithmetice proportionalium (ſive juxta naturalem numerorum conſequutionem) continue creſcentium, a puncto vel o (cyphra ſeu nihilo) inchoatarum (puta o, 1, 2, 3, 4, &c,) propoſitum ſit inquirere quam habet rationem earum omnium aggregatum ad aggregatum totidem maximæ æqualium.*

B. Rationem habet tota ſeries ad numerum terminorum multiplicatum per maximum, eandem quam habet ſemiſſis ad integrum. Summa enim terminorum omnium (ut in hac ſerie o, 1, 2, 3, 4,) æqualis eſt producto ex numero terminorum ducto in ſemiſſem maximæ. Itaque cum termini hic ſint quinque & maximæ ſemiſſis 2, erit productus ex 2 in 5 æqualis 10. Eſt autem 10 ſumma terminorum omnium: idem contingeret in alia quavis progreſſione Arithmetica incipiente a cyphra, ut o, 3, 6, 9, ubi ſumma maximæ & minimæ id eſt 9 ducta in ſemiſſem numeri terminorum 2, facit 18, ſemiſſem ducti 9 in numerum terminorum 4. Geometricè etiam probari poteſt, eodem Argumento quo triangulum oſtenditur parallelogrammi ſui eſſe dimidium.

A. Notiſſimum eſt. Sed non hic de veritate quæritur concluſionis ſed demonſtrationis. Nam per inductionem probat. Inductio autem demonſtratio non eſt, niſi ubi particularia omnia enumerantur, quod hic eſt impoſſibile. Itaque cum poſt expoſita aliquot particularia ſubjungit, [*Et pari modo quantumlibet progrediamur, prodibit ſemper ratio ſubdupla,*] libenter velim ſcire, unde id ſcit, niſi cauſam proferat aut ſciat quare neceſſario ita eſt. Secunda propoſitio eadem eſt cum prima (& propterea falſa, ut alio tempore oſtendetur) niſi quod addit idem contingere etſi numerus terminorum ſit infinitus.

B. Id certè falsum est. Siquidem enim numerorum termini numero infiniti essent, etiam terminus maximus solus per se infinitus esset, & summa terminorum numero infinitorum semissis esset infinitæ summæ infinities multiplicatæ.

A. Non ille primus se induit absurdis quæ circumstant contemplantes Infinitatem. Prop. tertia hæc est, *Triangulum ad Parallelogrammum (super æquali basi æque altum) est ut* 1 *ad* 2. Imo verò, non *ergo*, sed propter causas ab Euclide dictas Elem. 1. Prop. 41. Idem dicendum est ad Prop. 4. de Conocide parabolico, propter causas ab aliis exhibitas. Propositione quinta, eadem methodo probare vult lineam spiralem esse ad Arcum Circuli sibi respondentem ut 1 ad 2. Quod est falsum.

B. Etiam confitente *Wallisio*, qui in Scholio ad Prop. 13: per spiralem intelligere se dicit arcuum omnium infinite parvorum aggregatum.

A. Sed in propositione hac loquitur manifesto de spirali descripta ab Archimede. Propositiones ergo 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, sunt falsæ, ut quæ ab hac dependent. Præterea quam absurdum est lineam constantem ex infinitis numero Arcubus infinitè parvis appellare spiralem, quæ si regulariter sive regulari motu generetur, necessario erit arcus circuli. Itaque etiam propositiones 14, 15, 16, 17, 18, quæ fundantur super hanc ejus spiralis interpretationem, sunt omnes falsæ. Neque ductæ a Centro ad æquales illos exiguos arcus erunt Arithmetice proportionales. Comparata hæc ad sequentia leviuscula sunt.

B. An pejus in Geometria esse potest quàm facere spiralem constare ex arcubus circuli, iisdemque a rectis e centro interceptis Arithmetice proportionalibus, quique etaiam æquales efficiunt Angulos?

A. Satis quidem absurda illa sunt; sed videamus & hæc. Propositio 19. Lemma. [*Si proponatur series quantitatum in duplicata ratione Arithmetice proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum) continue crescentium a puncto vel o inchoatarum, puta ut* 0, 1, 4, 9, 16, *&c, propositum sit inquirere quam habeat illa rationem ad seriem totidem maximæ æqualium.*

Fiat investigatio per modum inductionis (ut in prop. 1.)

Eritq;
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{0+1}{1+1} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} \\[2ex] \dfrac{0+1+4=5}{4+4+4=12} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} \\[2ex] \dfrac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \dfrac{14}{36} = \dfrac{7}{18} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{18} \end{array}\right.$$
& sic deinceps.

Ratio

Ratio proveniens est ubique major quam subtripla, seu $\frac{1}{3}$. Excessus autem perpetuo decrescit prout numerus terminorum augetur; puta $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{36}$ &c, aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis numero senario (ut patet) ut sit rationis provenientis excessus supra subtriplum, ea quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post 0, adeoque;]

B. Permitte mihi eadem unà tecum inspicere.

A. Illud $\frac{0 \dagger 1}{1 \dagger 1}$ quid sunt? Fractiones an Rationes?

B. Utrumvis. Nosti enim huic scriptori eandem esse rem, Rationem & Fractionem.

A. Est ergo Fractio, & $\frac{1}{1}$ Fractio & $\frac{0 \dagger 1}{1 \dagger 1}$ summa earum, eademq; æqualis $\frac{1}{2}$.

B. Ita.

A. Sed Fractio $\frac{0}{1}$ est nihil; ergo sola Fractio $\frac{1}{1}$ per se æqualis est fractioni $\frac{1}{2}$ Satin' hoc absurdum?

B. Ita est, sed non magis quam doctrina ejus de spirali. At fortassis $\frac{0 \dagger 1}{1 \dagger 1}$ unica est fractio & proinde, æqualis $\frac{1}{2}$, & illa æqualis $\frac{3}{6}$ & hæc æqualis $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{6}$. Quid hic absurdi est?

A. Nonne vides dum copulatas quantitates pro fractione una habes facere te $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{6}$ id est $\frac{2}{9}$ æqualem $\frac{1}{2}$?

B. Video. Sed etsi ponat $\frac{0 \dagger 1}{1 \dagger 1}$ pro unica fractione, ponit fortasse $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{6}$ pro duabus.

A. Esto. Quomodo ergo unica ratio 3 ad *6* æqualis est duabus Rationibus 1 ad 3 & 1 ad *6*, quod ille dicit, cum rationem 3 ad 6 superare dicat Rationem 1 ad 3 Ratione 1 ad *6*?

B. Nonne recte?

A. Minime. Quoniam enim $\frac{3}{6}$ est Ratio 3 ad *6*, eademque æqualis duabus simul Rationibus 1 ad 3, & 1 ad *6*; si componantur Ratione, 1 ad 3, & 1 ad *6*, erit Ratio proveniens (per illum) Rationes 3 ad *6*.

B. Rectè.

A, Componuntur autem Rationes quando Rationum quantitates id est, tam Antecedentes quam Consequentes ipsarum inter se multiplicantur. Rationes ergo 1 ad 3, & 1 ad *6* compositæ faciunt Rationem 1 ad 18. Vel sic, fiat ut 1 ad *6* ita 3 ad aliam, & oritur 18. Et proinde expositis his numeris 1, *6*, 18, priores duo habent Rationem 1 ad *6*, & posteriores Rationem *6* ad 18, sive 1 ad 3. Quare ratio $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{6}$ æqualis est Rationi 1 ad 18. Est ergo per *Wallisium* eadem Ratio 3 ad *6* quæ 1 ad 18.

B.

B. Monstri simile est.

A. Similiter rationem 5 ad 12 æqualem facit Rationibus 1 ad 3, & 1 ad 12 simul sumptis; quæ duæ Rationes compositæ faciunt Rationem 1 ad 36, itaque 5 ad 12 eandem habet Rationem quam 1 ad 36.

B. Itaque quicquid ex hac operatione inferetur pro indemonstrato habendum est.

A. Inferetur autem primo, propositio sequens, nempe vicesima. [*Si proponatur series quantitatum in duplicata Ratione Arithmetice proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum continue crescentium, a puncto vel o inchoatarum; ratio quam habet illa ad seriem totidem maximæ æqualium, subtriplam superabit; eritque excessus, ea ratio quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post, o; sive, quam habet radix quadratica termini primi post o, ad sextuplum radicis quadraticæ termini maximi.*] Clarè hic loquutus est.

B. Intelligo. Rationem quam habet series crescentium ad seriem totidem maximæ æqualium, majorem esse dicit, quam Ratio 1 ad 3 tanto quanto est Ratio unitatis ad sextuplum numeri terminorum post o, hoc est (in serie, $\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12}$) rationem 5 ad 12 majorem esse Ratione 1 ad 3, sive 4 ad 12 tanto quanta est ratio 1 ad 12.

A. Rectè intelligis. Est autem falsum. Nam ratio 5 ad 12 æqualis esset ambabus simul rationibus 1 ad 3, & 1 ad 12. Quæ rationes compositæ juxta definitionem Elem. 6. 5. faciunt rationem 1 ad 36. Est ergo ratio 5 ad 12 æqualis rationi 1 ad 36. Vel si inter 5 & 12 interponamus 4, ut sint tres quantitates 5, 4, 12, ratio primæ 5 ad tertiam 12, major erit ratione 4 ad 12, id est Ratione subtripla, tanto quanta est ratio 5 ad 4. Itaq; per bonum vestrum Professorem eadem est ratio 5 ad 4, & 1 ad 12.

B. Error manifestus est, & quidem major illo quem erravit in doctrina spiralium. Quod non facile credidissem.

A. Vide jam id quod inde infert, nempe, Si series hæc quadratica esset infinita, summa crescentium ad summam totidem maximarum esset accuratè in ratione 1 ad 3. Sic enim probat, [*Cum autem crescente numero terminorum, excessus ille supra Rationem subtriplam ita continuo minuatur, ut tandem quovis assignabili minor evadat, (ut patet) si in infinitum procedatur prorsus evaniturus est. Adeoque, si* (quæ est propositio 21) *proponatur series infinita quantitatum in duplicata Ratione Arithmetice proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum) continue crescentium, a puncto sue o inchoatarum; erit illa ad seriem totidem maximæ æqualium, ut* 1 *ad* 3.]

B. Videtur sane excessum rationis si perpetuo minuatur, debere tandem evanescere; saltem tam exiguum esse, ut nullius deberet esse con-

considerationis. Itaque pereunte excessu rationis supra subtriplam relinquetur præcisè subtripla.

A. Ita certè, nisi una crescerent quantitates comparatæ. Vide seriem primam $\frac{0 + 1}{1 + 1}$; nonne majorem rationem habet $0 + 1$ ad $1 + 1$ quam 1 ad 3, id est quam ratio suptripla?

B. Ita quidem, sed ut additâ ad consequentem unitate esset subtripla.

A. Deinde vide seriem secundam $\frac{0 + 1 + 4}{4 + 4 + 4}$. Nonne ratio seriei crescentis 5 ad seriem maximarum 12 major est quam subtripla?

B. Etiam. Ita vero ut addito ad consequentem numero 3 fiat subtripla?

A. Manifestum ergo est, si procedatur in infinitum numerus crescentium major erit numero subtriplo maximarum; eritque excessus numerus major quam ut possit dici. Tantum abest ut series crescentium, quantumvis procedendo, possit esse subtripla seriei maximarum.

B. Error est manifestissimus.

A. Ex propositione hac dependent non modo omnes sequentes usque ad 39, sed etiam omnes illæ quibus rationem determinat parabolarum & paraboloideum ad circumscripta parallelogramma.

B. Sed rationes quas assignavit veræ sunt, & a Mathematicis receptæ.

A. Vere quidem, & jamdiu circumlatæ sunt, sed sine demonstratione.

B. Demonstratæ extant ab *Hobbio* Cap. 7. Lib. de Corpore, Editione Latina. Item aliter demonstratæ in Editione Anglica, Cap. 15. Art. 2.

A. Prop. 39. [*Si proponatur series quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice proportionalium, (sive juxta seriem numerorum Cubicorum,) continue crescentium, a puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 8, 27, 64, &c.) propositum sit inquirere quam habeat illa rationem ad seriem totidem maximæ æqualium.*]

Fiat investigatio per modum inductionis (ut in Prop. 1. & 19.)

Eritq;
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{0 + 1 = 1}{1 + 1 = 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}. \\ \dfrac{0 + 1 + 8 = 9}{8 + 8 + 8 = 24} = \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}. \\ \dfrac{0 + 1 + 8 + 27 = 36}{27 + 27 + 27 + 27 = 108} = \frac{4}{12} = \frac{1}{4} = + \frac{1}{12}. \end{array}\right.$$ *Et sic deinceps.*

Ratio proveniens est ubique major quam subquadrupla, seu $\frac{1}{4}$. *Excessus autem*

autem perpetuo decrescit prout numerus terminorum augetur, puta $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{24}$. *&c. aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis, numero quaternario, (ut patet) ut sit rationis provenientis excessus supra subquadruplam, ea quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum post o, Adeoque.*]

B. Eadem est methodus quæ in Prop. 19. An & iidem errores ?

A. Plane iidem. Nam si $\frac{2}{4} = \frac{1}{4} \dagger \frac{1}{4}$ rationes sint, impossibile est ut ratio 2 ad 4, sit æqualis duabus rationibus 1 ad 4, & 1 ad 4, Nam ratio 2 ad 4 duplicata esset rationis 1 ad 4. Sed ratio 1 ad 16 duplicata est rationis 1 ad 4. Esset ergo ut 2 ad 4, ita 1 ad 16. Conclusio autem quam deducit ex hac Prop. 39. est propositio 40, nempe hæc. [*Si proponatur series quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice proportionalium (sive juxta seriem numerorum cubicorum) continue crescentium, a puncto vel o, inchoatarum; ratio, quam habet illa ad seriem totidem maximæ æqualium subquadruplam superabit; eritque excessus, ea ratio quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum post o; sive, quam habet radix cubica termini primi post o, ad quadruplum radicis cubicæ termini maximi.*]

B. Erit, inquit, excessus rationis quam habet series crescentium ad totidem maximas, supra rationem subquadruplam, ea ratio quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum post o. Id est, in hac serie $\frac{0 \dagger 1 \dagger 8}{8 \dagger 8 \dagger 8}$ ratio 9 ad 24 superabit rationem subquadruplam, & excessus erit ratio 1 ad 32.

A. Nonne ergo ratio 1 ad 32 composita cum ratione subquadrupla faciet rationem 9 ad 24.

B. Certissimè.

A. Sed ratio 1 ad 32; & ratio 6 ad 24, id est subquadrupla faciunt rationem 6 ad 768. Est ergo ut 9 ad 24 ita 6 ad 768. Vel si ponantur ordine hi numeri 9, 6, 24, ratio 6 ad 24 est subquadrupla. Superat autem ratio 9 ad 24 rationem 6 ad 24 subquadruplam, ratione 9 ad 6, Est ergo ut 9 ad 6 ita 1 ad 32. Siccine solent γεωμετρεῖν Professores publici ?

B. Eundem errat errorem nunc & ante.

A. Deinde quod infert, [*Cum autem, crescente numero terminorum, excessus ille supra rationem subquadruplam ita continuo minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat, (ut patet;) si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est. Adeoque* (quæ est propositio 41) *Si proponatur series infinita quantitatum in Triplicata Ratione Arithmetice proportionalium (sive juxta seriem numerorum cubicorum) continue crescentium, a puncto seu o inchoatarum; erit ille ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 4,*] falsum est. Est enim in prima serie

o † 1

$\frac{0+1}{1+1}$ summa crescentium major quam subquadrupla totidem maximarum, tanto quanta est semissis Unitatis. In serie secunda summa crescentium superat subquadruplam maximarum tribus unitatibus. In tertia novem Unitatibus &c. Quousque procedendum esse putas ut summa crescentium sit tandem maximarum subquadrupla.

B. Quantò plus proceditur tanto pejus. Propositio est falsa.

A. Deinde prop. 43. [*Pari* (inquit) *methodo invenietur ratio seriei infinitæ quantitatum in ratione quadruplicata, quintuplicata, sextuplicata, &c, Arithmetice proportionalium a puncto seu o inchoatarum ad seriem totidem maximæ æqualium; nempe in quadruplicata* 1 *ad* 5. &c.]

B. Falsum est; ne examines.

A. Imo vero quid afferant novi quæ sequuntur, ulterius ne quæramus, cum ab his dependeant cætera omnia.

B. Ne imaginari quidem possum quicquam quod aut *VVallisius* aut eorum ullus, qui libros ejus literis ad ipsum scriptis laudaverunt contra hæc tam perspicue demonstrata afferre possunt.

A. Extantne Geometrarum literæ quibus Geometria hæc *Wallisii* comprobatur?

B. Extant quidem (editæ ab *Wallisio*) altera *Hugenii*, altera nescio cujus, sed dicunt aliqui esse *Schootenii* vix Latina. Præterea *Robervallus*, Professor Parisiis Celeberrimus, idemque alias in demonstrationibus propriis satis cautus, chartulæ cujusdam manuscriptæ exemplaria aliquot in Angliam transmisit, in qua doctrinam de comparatione parabolarum, & Conoideum ex illis factorum ad parallelogramma & Cylindros circumscriptos, in hoc tractatu *De Arithmetica Infinitorum*, expositam negat ab *Wallisio* primo, sed a se inventam esse asserit. Quod non fecisset nisi Doctrinam ipsam veram esse censuisset.

A. Mirandum non est si illi qui maximam operam in eo posuerunt ut rationem Arcus ad radium ad numeros reducerent, Methodum hanc Symbolicam incautè amplexi sint. Sed ut *Robervallus*, qui Geometrarum primus esse vult & ferè est (nam excipio saltem D. Fermatium) Paralogismos tam crassos videre non potuerit, profecto mirandum est.

B. Habet hoc peculiare *Robervallus*, cum egregium quis a se inventum Theorema in publicum emiserit, ut statim distributis chartulis dicat idem a se inventum esse prius. Itaque Theorema de solido Hyperbolico inventum, a Toricellio postquam esset editum ad se rapuit; & nunc Methodum de comparatione Paraboloideum editam

ab *VVallisio* & solo *Wallisio* dignam suam haberi incautus petit. Idem *Hobbium* qui æqualitatem inter spiralem, & parabolicam, primus vidit, quia ipse eandem priùs demonstraverat appellat Plagiarium.

B. Et merito? siquidem *Robervalli* demonstrationem ediderat ut suam.

A. Sed demonstrationem *Robervalli* negat se vidisse; sed cum convenissent Parisiis in Cænobio Minimorum, ipse, Mersennus, *Robervallus*, & quartus (quem non nominat) incidissetque sermo de comparatione Spiralis & Parabolicæ, videtur, inquit *Hobbius*, linea spiralis æqualis esse rectæ quæ subtendit Semiparabolam, cujusque quidem Axis, sit æqualis Semiperimetro circuli spiralem continentis; Basis autem ejusdem circuli Radio. Itaq; creta designans figuram in pariete, sic arguebat. Quoniam in Axe parabolæ, motus quo parabola generatur augetur juxta rationem temporum duplicatam, motus autem in Base est uniformis; item quia motus quo generatur spiralis, in circulo augetur in ratione temporum duplicata, & in Radio est Uniformis; videtur similis esse generatio unius generationi alterius; & proinde si vertex Semiparabolæ cum termino Basis connecteretur per lineam rectam, rectam illam, ut quæ eandem habet generationem, æqualem esse oportere Spirali. Quæ illatio vera non erat, sed contra conclusionem quam probare conatus est. Id cum animadvertisset *Robervallus*, recta (inquit) Semiparabolam subtendens fit a motu utroque uniformi. Itaque abjecta creta errorem agnovit *Hobbius*. At *Robervallus* postridie eandem propositionem ad Mersennum demonstratam attulit. Quam tamen demonstrationem non vidit *Hobbius*, sed postea Theorema idem sua Methodo demonstravit ediditque.

A. Si ita est, inventionem illam *Hobbio* potius quam *Robervallo* adjudicarem, & hunc quam illum dicerem plagiarium. Sed quo teste rem ita esse probaveris si opus sit.

B. Quæsivit *Hobbius* per epistolam a quarto illo, quem non nominavit utrum chartula illa ipsius esset *Robervalli*, necne. Is autem nescire se rescripsit cujus esset; sed paratum se testem esse, lucem & Methodum demonstrationis suæ accepisse ab *Hobbio Robervallum*. Sic enim scribit Gallice. *Ie n'ay pas veu sa demonstration, mais quoy quil fasse il ne peut desnier que vous ne soyes cause quil ait trouvé cette proposition, puisque vous luy aves donné l'idee, & le suiet de la trouver, C est ce que ie tesmoigneray tous jours;*

B. Quoniam parabolæ & Paraboloideum cum Parallelogrammis, & Conoideum cum Cylindris comparationem, neque methodo hac *Wallisiana*, neque ab ullo alio (quanquam vulgo receptam) demonstrationibus

ſtrationibus editis demonſtratam eſſe dicis, age, ſi quam habes ejus rei demonſtrationem, profer illam.

A. *Proferam*, puto, eamque univerſalem.

Deſcribatur parallelogrammum A B C D intelligaturque baſis A *B* moveri parallela ad C D, ita ut dum movetur perpetuo decreſcat donec evaneſcat in puncto C; ſitque ratio diminutæ A B ad ipſam A B integram, ubique eadem quæ ratio A C ad A G, vel ubique duplicata, vel triplicata, vel in alia quacunque ratione rationis ad rationem. Dum A *B* eo modo decreſcit, punctum *B* deſcribat lineam aliquam, puta *B* E F C. Dico jam, ſi ratio A C ad A G ſit eadem quæ ratio A *B* ad G E, ſpatium A *B* E F C eſſe ad ſpatium A C F E *B* ut 1 ad 1; ſi vero ratio A C ad A G ſit duplicata rationis A *B* ad G E ſpatium D *B* E F C eſſe ad ſpatium A C F E *B* ut 1 ad 2; ſi triplicata, ut 1 ad 3; & ſic deinceps. Intellextin'?

B. Intelligo, & ſiquidem ita eſſe demonſtraveris, video eſſe facillimum paraboloidis cujuſcunque ad ſuum parallelogrammum, & Conoidis cujuſcunque ad ſuum Cylindrum rationem exhibere in numeris.

A. Aſſumo autem primo, [*quod qua ratione Mobilis velocitas augetur eadem ratione augeri quoque ſpatia ab ea iiſdem vel æqualibus temporibus percurſa. Secundo, quod ſi inter duas rectas interponantur mediæ tum Arithmetica tum Geometrica numero infinitæ, hæ & illæ magnitudine non different; ſaltem differentiæ earum minores erunt qualibet quantitate finita.*]

B. Utrumque manifeſtum eſt; & poteſt demonſtrari. Nam incipiendo a maxima extremarum major eſt media Arithmetica quam Geometrica; quanto autem minus inter ſe extremæ differunt tanto differentia inter mediam Arithmeticam & Geometricam minor eſt. Itaque ſi mediæ tum Arithmeticæ tum Geometricæ ubiq; interponantur minus inter ſe different omni quantitate effabili.

A. Recte. Itaque in parallelogrammo A B C D concipiatur latus A B moveri ad latus C D Parallelās, & movendo decreſcere donec tandem evaneſcat in puncto C, & per talem motum deſcripta ſit figura A B E F C, relicto complemento D C F E B, cujus linea *B* E F C deſcribitur a termino B decreſcentis A B. Eodem autem tempore moveri intelligatur latus A C ad latus A B uniformiter; poteſt igitur haberi C D pro menſura Temporis; rectæ autem ipſi C D parallelæ, terminatæ ab una parte in linea *B* E F C, in altera parte in recta A C erunt menſura partium Temporis in quo A *B* movetur ad C D, & A C ad B D. Sumatur jam in recta C D, ad placitum punctum O, ducaturque O R parallela lateri B D ſecans lineam B E F C in E, & rectam A B in R, Et rurſus a puncto Q ſumpto, in C D

 arbi-

arbitrarie, ducatur eidem lateri B D parallela Q S secans B E F C in F, & A B in S. Ducantur etiam E G, F H parallelæ C D secantes A C in G & H. Postremo idem supponatur fieri per omnia puncta lineæ B E F C. Habes Constructionem.

B. Habeo & teneo.

A. Dico jam esse ut aggregatum omnium velocitatum quibus describuntur rectæ Q F, O E, D B, cæteræque omnes eadem Methodo genitæ, ad aggregatum rationum Temporum designatorum per rectas H F, G E, A B, & cæteras, ita planum D C F E B ad planum A B E F C. Sicut enim A B decrescendo per lineam B E F C in Tempore C D, evanescit in punctum C, ita C D (ipsi A B æqualis) decrescendo per eandem lineam C F E B eodem Tempore evanescit in punctum *B*, discripta recta D B æquali A C. Sunt ergo velocitates quibus describuntur A C & D B inter se æquales. Rursus quoniam eodem Tempore quo punctum O describit rectam OE, eodem Tempore punctum R describit rectam R E, erit O E ad R E, ut velocitas qua describitur O E, ad velocitatem qua describitur R E. Et propter eandem causam Q F erit ad S F ut velocitas qua describitur Q F ad velocitatem qua describitur S F ; & sic de cæteris omnibus rectis rectæ D B parallelis. Ut ergo rectæ quæ sunt parallelæ lateri A B, terminanturque in linea B E F C sunt mensuræ Temporum ; ita rectæ quæ sunt parallelæ lateri B D, terminatæque in eadem linea *B* E F C, sunt mensuræ velocitatum. Nam concessum est, in qua ratione augentur velocitates, in eadem augeri rectas eodem Tempore percursas, id est, rectas Q F, O E, B D, &c.

B. Verum est.

A. Jam lineæ illæ omnes Q F, O E, B D, &c. constituunt planum D B E F C, & lineæ omnes H F, G E, A B &c. constituunt planum A C F E B. Quarum illæ sunt aggregatum velocitatum, hæ aggregatum Temporum. Ut igitur aggregatum volocitatum ad aggregatum temporum, ita Complementum D B E F C ad figuram A B E F C. Siquidem ergo rationes D B ad O E & O E ad Q F fuerint ubique rationum A B ad G E, & G E ad H F (exempli causa) triplicatæ, erunt vice versa rationes O E, ad D B, & Q F ad O E, rationum G E ad A B, & H F ad G E subtriplicatæ. Quare aggregatum omnium Q F, O E, B D &c. aggregati omnium H F, G E, A B, &c. erit (per assumptum secundum) subtriplum. Ut ergo aggregatum velocitatum ad aggregatum Temporum quibus describuntur figura deficiens & Complementum, ita erit ipsum Complementum ad figuram ipsam, nimirum complementum D B E F C ad figuram A B E F C quod erat Demonstrandum.

B. Sequitur hinc quod cum in Triangulis basis decrescit in ratione Temporum, parallelogrammum erit sui Trianguli duplum; cumque basis semiparabolæ decrescat in ratione Temporum duplicata erit parallelogrammum suæ parabolæ sesquialterum, ut & Cylindrus sui Conoidis parabolici duplum; cum item basis paraboloidis cubici sive parabolastri primi, decrescat in ratione Temporum triplicata, erit parallelogrammum sui parabolastri primi sesquitertium; & Cylindrus sui Coni triplum; & parallelpipedum sui pyramidis triplum. Et sit de cæteris figuris, prout postulant rationes juxta quas generantur.

B. Itaq; Theorema hoc universale nempe [*in omni figura generata per motum quanti decrescentis donec evanescat in punctum, secundum quamlibet rationem constantem ab initio motus ad finem, Rationem figuræ factæ ad complementum ejus, id est ad id quo figura facta superatur ab ea figura quæ facta esset si Quantum Generans mansisset integrum, eam esse quam habet ratio reliqui ad reliquum ad Rationem ablati ad ablatum,*] Ideoque ubi reliquum ad reliquum est in ratione ablati ad ablatum duplicata vel triplicata &c, ibi figuram factam ad complementum esse duplum, triplum &c: respective; Theorema (inquam) hoc habet claritudinem per se tantam ferè ut possit haberi pro Axiomate, atque ob hanc fortasse causam, veritatem a tot Geometris agnitam fuisse, etsi a nemine hactenus demonstratam.

A. Itaque *VVallisius* qui nil tam difficile esse arbitratus est quin per artem Analyticam inveniri & solvi posset, artemque Analycam nihil aliud esse quam vocabulorum & orationis loco, notis quibusdam novis (quæ vocant symbola) Ratiocinationis suæ vestigia pingere, Theoremata hæc, aliaque difficiliora, quæ ut certa jam ludum circumferebatur, nova a se methodo demonstrata esse opinatus est. Et quia videbat (cum omnibus) in progressione numerorum a Cyphra sine o, summam numerorum progredientium dimidiam esse summæ numeri maximi toties sumpti quot sunt termini progressionis, idem accidere etiam affirmavit ubi lineæ latitudinis infinite exiguæ, crescētes a puncto, secundum progressionem eandem, constituent superficiem qualemcunque. Quod (nescientibus illius Encomiastis & nonnullis præterea Geometriæ professoribus) falsum, neque nisi de Triangulis rectilineis universaliter pronunciandum est.

A. Vidisti jam Tractatus *Wallisii* tum Geometricos tum Arithmeticos nullius esse pretii, ut qui nullam continent veri Theorematis demonstrationem novam; sed vel aliorum demonstrationes symbolicè (id est obscurè) transcriptas; vel suas ipsius falsas; vel etiam aliquando, (præsertim in Tractatu de Arith. infinit.) Theoremata ipsa falsa.

Judica

Judica ergo, ipse *Wallisius* & Doctrinæ *Wallisianæ* comprobatores & Encomiastæ quales sunt Mathematici. Legisti etiam Elenchum ejus & vidisti quam sit refertus conviciis rusticanis. Judica ergo quam necessaria conditio sit ad Theologiæ Doctoratum ut quis sit vir bonus. Conviciorum causa fuit ira, sed quæ causa iræ? Nempe homines ambitiosi cupidique regnandi non modo in foro externo, sed etiam in interno, ad omne dictum vel scriptum quod cupiditati eorum adversatur illico excandescunt; & (siquidem audent) maledictis onerant. Causa autem ignorantiæ est partim quod scientias non ipsarum amore, sed lucri causa adeunt ut stipendia mereantur; maxime vero quod scientiam non in rerum ipsarum Imaginibus, sed in verbis Magistrorum quærunt, iisque non semper intellectis. Itaque Principia ignorantes, id est naturam Puncti, Lineæ, Anguli, Rationis nescientes, in absurda quæ recensuimus delapsi sunt.

B. Sic puto.

A. Accessit quoque scientiis damnosa illa multitudo Symbolorum, quorum fiducia attentionem ad rerum ipsarum Ideas remiserunt, quæ inventa ad leniendum nobilium adolescentulorum in quærendis Problematum Arithmeticorum solutionibus molestiam, adeo visa est res elegans, ut nihil esse neq; in *Arithmetica*, neq; in Geometria tam difficile videretur quod ope Symbolorum solvi non posset. Itaq; omnes laudare & magnifacere scientiam quandam quam nominarunt *Symbolicam*; etiam homines quibus nihil videbatur ad eminentiam deesse præterquam ut docti essent in Mathematicis, Magistris usi sunt Symbolicis, frustra. Verum sicut sine suspitione criminis nemo fit inexpectatò & repentine dives, ita nemo ullo modo sine magno studio & labore fiet doctus

B. Parumne prodest ad solutionem problematum Mathematicorum ars *Analytica*, & ad *Analyticam* usus symbolorum?

A. Imo multum. Sed quid hoc ad nuper introducta Symbola? Literæ A, B, C, &c, quibus solis usi sunt Geometræ veteres, nonne sunt Symbola? Plura autem sæpius ἐνοχλοῦσιν quam adjuvant. Quod autem Analysin attinet, non minus apparet in scriptis *Euclidis*, *Archimedis*, *Apollonii* aliorumque antiquorum, quam Vietæ, Oughtredi, & cæterorum *Algebristarum*. Quid enim est Analytica hæc recentium?

B. Est ars qua a quæsiti suppositione pervenitur per consequentias ad vera Naturæ ordine priora. Et Synthetica, qua reciprocè a veris prioribus venitur ad quæsiti Conclusionem.

A. *Euclides* ergo & cæteri antiqui ea perpetuo usi sunt. Quid enim, cùm apud illos Theorema legis quod incipit a *Si*, nonne vox illa *Si* denotat aliquid esse suppositum, exempli gratia æqualitatem angulorum,

rum, unde per consequentias venitur ad aliquod prius quæ est æqualitas laterum? Hæc autem est *Analysis*. Deinde reciproce ex æqualitate laterum concluditur æqualitas angulorum, quod ante erat quæsitum; quæ est synthesis. Itaque ne crede symbolicam hanc hodiernam veteribus in usu fuisse, aut omnino cognitam, neque, ut quidam nimium astuti homines dixere (nescio quam ab causam) dissimulatam. Sed *Wallisio* laudatoribusque ejus nunc amissis, convertamur ad alia.

DIALO-

Dialogus Sextus.

A. IN dimensione Circuli investiganda Methodus Arithmeticorum vulgo recepta falsa est. Salve mi B; non te prævideram.

B. Et tu salve.

A. Unde advenis.

B. ἥκω λίπων Ἀγγλείου ἅλμυρον βάθος πόντου.

A. Usus ergo es (ut videtur) navigatione adversa.

B. *Jamjam tacturos sidera summa putes. Jamjam casuros Tartara ad ima putes.*

A. Non tam marinis quam Heliconiis aquis madescere videris. Sed unde ad mare?

B. Parisiis.

A. Gaudeo salvum te rediisse atq; etiam hilarem. At quid istinc adfers novi?

B. Reges, aiunt--.

A. Noli de Regibus mihi, Loquere de iis rebus quæ pertinere possunt ad te & me.

B. Nuntio ergo tibi, inventam esse quadraturam Circuli.

A. Papæ! a quo?

B. Inventam dico, non editam. Nam siquidem nemo ante primum diem mensis Octobris proximi (in quem diem circa eam rem indictum est Geometris, proposito præmio, certamen) demonstrationem ejus invenerit, is qui præmium proposuit ipse a se inventam publici juris faciet.

A. Loqueris, credo, de quæsitis circa Cycloidem, nimirum, *Quanam sit data partis ejus magnitudo, & quod Centrum gravitatis.* Item *quæ sit solidi magnitudo & Centrum gravitatis facti ex data partis revolutione, sive circa Cycloidis Basem, sive circa Diametrum Circuli genitoris*; sine ulla quadraturæ Circuli mentione.

B. Sed qui ista problemata omnia solverit, nonne Centrum gravitatis etiam Circuli genitoris idem exhibebit? Eo dato, quin dimensio Circuli innotescat quid impedit? Adde, quod vera Cyclois, nisi cognita perimetri Circuli magnitudine, id est, ratione quam habet ad suam Diametrum, ne describi quidem potest. *Describitur enim Cyclois a puncto Circuli genitoris & diametri communi, moto super lineam rectam in plano existentem cui Diameter est erecta, per motum compositum ex motu Circulari per peripheriam. & motu recto Centri uniformi, & æquè veloci.* Fit igitur ut Circulus, una facta revolutione, rectam describat in plano, suæ perimetro æqualem; ut videre est in revolutione cujuslibet rotæ. Dum ergo perimetri longitudo justa ignoratur, neque vera Cyclois describi, neq; Centrum gravitatis ipsius (multo minus partium ejus) exhiberi potest.

A. Quod Centrum gravitatis Cycloidis sit in linea recta Basi Parallela, ita secante Diametrum Circuli genitoris, ut pars major sit ad minorem ut 7 ad 5, demonstrari potest, etiamsi magnitudo perimetri sit incognita. Etiam demonstrari potest Centrum gravitatis ejusdem esse in linea recta, ita secante Basem ipsius ad angulos rectos, ut pars major ad minorem iterum sit ut 7 ad 5. Duæ ergo Diametri gravitatis inventæ sunt. Sed illæ se mutuo secant in gravitatis Centro. Nonne ergo datur Centrum ipsum?

B. Minimè. Nam lineam non datam secare in datas partes non potes. Etsi enim motus uterque (rectus & circularis) uniformis sit, si tamen æque veloces non sint, facient compositi talem motum, ut partes rectæ lineæ super planum a Circulo designatæ, sint partibus perimetri eodem tempore percursis proportionales quidem, verum non æquales; id quod in vera Cycloide requirendum est.

A. Recte dicis. Expectabimus ergo Circuli quadraturam, non illam veræ propinquam Arithmeticorum, sed in lineis vel numeris calculo exactissimo demonstratam. Sed quis est certaminis hujus institutor Hercules Mathematicus?

B. Nescio sane. Sed propositum præmium intuenti videtur mihi, quisquis est, non esse e numero Professorum.

B. Sed cur non ad certamen hoc accessisti tu?

A. Ut dicam quod res est, problemata illa ante diem præstitutum non potui omnia solvere; sunt enim difficillima. Quoniam autem dignissima

ea

ea judicavi in quibus exercerer, quantum potui animum ad ea applicui. Sed cum non viderer mihi quicquam proficere posse sine cognitione magnitudinis Arcus Circuli, meditationes meæ primæ in ea investiganda consumptæ sunt; & Theorematum aliquot Cyclometricorum demonstrationes (ut mihi videntur) faciles & perspicuas jam scriptas habeo.

B. Licetne mihi eas videre?

A. Imo vero, nisi improbum esset, ultro te rogarem, ut illas velles examinare.

B. Quid improbum? Ego vero ad te venio tibi vacaturus, & si quid vis, operam meam, quantulacunq; ea sit, oblaturus; sed ea lege, ut si quid reprehendero, quanquam etiam inepte, æquo animo id feras.

A. Benigne dicis. Et malo errata mea à te minime maledico monstrari mihi, quam ab inimicis cum convicio exprobrari.

B. Profer quæ scripsisti.

A. En Lege, adhibens figuram primam.

B. Hanc dicis lineosam?

A. Ne metue. Nam cum multis ea inserviat demonstrationibus, brevitate ipsa perspicuis, fiet ut multitudo linearum paulatim tibi familiaris facta molesta futura non sit.

Prop. 1.

Si ad Arcum quadrantis Circuli, & ejusdem Radium, assumatur tertia proportionalis; & ab ea tertia, ut radio, describatur rursus Arcus quadrantis; erit is Arcus æqualis Radio quadrantis prioris.

Fig. 1. Describatur quadratum ABCD, & Centro D, describatur Arcus quadrantis AEC, quem secet Diagonalis BD in E. Secet & diagonalis AC arcum BD in L, supponaturq; in recta BC producta, sumptam BF æqualem esse arcui AEC, jungaturq; AF, secans DC in G. Erit ergo (propter similitudinem triangulorum FBA, ADG) ut FB ad AB, id est, ad AD, ita AD ad DG, & propterea erunt BF, AB, DG, continue proportionales. Centro D, intervallo DG, describatur arcus quadrantis GHI, secans Diagonalem BD in H. Dico arcum GHI esse æqualem Radio AB. Quoniam enim FB, AD, DG sunt continue proportionales, etiam illarum æquales, nimirum arcus AEC, Radius DE, & recta DH sunt continue proportionales, Ut ergo arcus AEC ad DE, ita est DE ad DH. Sed ut arcus AEC ad DE, ita est arcus GHI ad DH. Est ergo arcus GHI æqualis rectæ DE, id est, Radio arcus AEC. Quod erat demonstrandum.

A. Qualis tibi videtur hæc demonstratio?

B. Proba & perspicua. Procedo ad cætera.

Definitio.

Recta quæ ad Arcum quadrantis & Radium totius Circuli est tertia proportionalis; sive Recta, a qua descriptus arcus quadrantis æqualis est Radio totius circuli appelletur *Z*.

Consectarium. Radius quadrantis, cujus quidem arcus æqualis sit rectæ BO sive Semiradio, æqualis est dimidiæ Z. Et Radius arcus quadrantis, qui quidem arcus æqualis sit duabus tertiis Rectæ AB, æqualis est duabus tertiis ejusdem Z. Et sic per omnes proportiones.

Prop. 2.

Dividatur quadratum ABCD in quatuor quadrata æqualia a rectis MN, OP (quæ secabunt se mutuo ad angulos rectos in centro totius quadrati ad Q) junganturq; AO, BN secantes se mutuo in V. Dico angulum AVB esse rectum.

Cum enim triangula ABO, NMB, sint similia, erunt anguli ad A & N æquales. Equales item erunt anguli ad O & B. Sed in triangulis ABO, AVB angulus ad A est communis, & angulus ABV æqualis angulo AOB. Quare angulus reliquus AV*B*, æqualis est reliquo ABD; id est rectus. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Punctum V est in arcu AEC; producta enim recta BN abscindet in producta AD, duplam ipsius AD. Idem autem faciet arcus AEC continuatus in Semicirculum. Erit ergo angulus AVB (qui ostensus est rectus) in semicirculo. Et proinde punctum V est in arcu AEC.

Prop 3.

Continuetur arcus BD usq; ad productam BA in K; & rectæ MN apponatur in directum NS æqualis semiradio; junctaq; KQ producatur, secans arcum BD in R, & rectam BC in T. Jungaturq; BS. Dico BS transituram esse per R.

Sunt enim triangula KMQ, SMB similia & æqualia. Ducta autem recta BR, erit angulus KRB (in semicirculo) rectus. Similia ergo sunt triangula KMQ id est SMB, & KRB; Habent enim angulum KBS communem. Et propterea transit BS per punctum R. Quod erat demonstrandum.

Consectarium 1. Angulus BRQ est rectus in semicirculo.

Consectarium 2. Recta BT est $\frac{2}{3}$ Radii BC. Est enim ut KM ad MQ; id est, ut 3 ad 1, ita KB diameter ad BT. Quare BT est $\frac{1}{3}$ diametri KB, id est, $\frac{2}{3}$ semidiametri BC.

Consectarium 3. QT est $\frac{1}{3}$ rectæ KQ sive BS. Et BR $\frac{1}{3}$ rectæ KR.

Sunt

Sunt enim similia triangula KMQ, KBT, KRB. Cum ergo recta MB sit tertia pars rectæ KM, erit QT tertia pars rectæ KQ sive BS; & BR $\frac{1}{3}$ rectæ KR. Et præterea recta RT erit $\frac{1}{3}$ rectæ BR. Nam similia sunt triangula KBT, BRT, propter angulum rectum ad R.

Prop. 4.

Recta BS dividit rectam QC bifariam.

Secet BS rectam QC in X. In triangulis BCX, SQX, anguli ad X verticales sunt æquales; anguli ad B & S alterni in parallelis BF, MS sunt etiam æquales.

Similia ergo sunt triangula. Sunt autem latera BC, QS æqualia. Quare etiam QX, XC sunt æqualia. Itaq; recta BS dividit rectam QC bifariam. Quod erat demonstrandum

Consect. X*a* ducta parallela rectæ BC & terminata in AB est $\frac{3}{4}$ Radii AB. Et potest BX decem quartas Radii AB.

Prop. 5.

Ut AO ad Radium AB ita est BX ad BQ, & ita BQ ad BR.

Est enim tum AB ad BO, tum BQ ad QX ut 2 ad 1. Sunt & anguli ad B & Q (triangulorum ABO, BQX) recti. Sunt ergo triangula illa similia. Quare ut AO ad AB ita BX ad BQ. Quod est primum. Rursus, quoniam in triangulis BQX, BRQ, anguli ad Q & R sunt recti, & angulus ad B communis triangula illa sunt similia. Ut ergo BX ad BQ ita est BQ ad BR. Quod erat demonstrandum.

Coroll. BR est dupla QR, & BQ dupla QX.

Prop. 6.

Radius AB (sive recta QS) est media proportionalis inter BS & BR.

Quoniam enim in triangulis SMB, SQR angulus ad S est communis, & anguli ad M & R recti; triangula illa sunt similia. Quare ut BS ad BM ita est QS (sive dupla BM) ad QR, & ut BS ad duplam BM, ita QS ad duplam QR, id est ad BR. Est ergo AB sive QS media proportionalis inter BS & BR. Quod erat demonstrandum.

Prop. 7.

Recta BR æqualis est duabus quintis rectæ BS.

Cum enim quadratum à QS æquale sit decem quadratis a QR, erit recta SR tripla rectæ QR. Sed BR est dupla ejusdem QR. Quare BS est quintupla QR. Est ergo BS ad BR ut quintupla ad duplam, hoc est ut 5 ad 2.

Itaq;

Itaq; BR est æqualis duabus quintis totius BS. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Arcus quadrantis descriptus radio BS (æquali BF) nempe arcus FSe est ad arcum quadrantis descripti centro B, semidiametro BR, ut 5 ad 2. Nam arcuum similium ad suas semidiametros eadem est ratio.

Prop. 8.

Si a puncto R ducatur recta RY perpendicularis ad AB, erit RY æqualis tribus quintis Radii AB.

Nam propter angulum RYB rectum, erunt SM, RY parrallelæ, & angulus BSM æqualis angulo BRY, & per consequens, triangula BSM, BRY similia. Quare ut BS ad BR, id est ad $\frac{2}{5}$ ipsius BS ita est SM ad RY. Sed ut BS ad $\frac{2}{5}$ ipsius BS, ita est SM ad $\frac{2}{5}$ ipsius SM. Est ergo RY $\frac{2}{5}$ ipsius SM sive trium semiradiorum, id est $\frac{3}{5}$ duorum semiradiorum, sive ipsius radii AB. Est ergo RY æqualis tribus quintis radii AB. Quod erat demonstrandum.

Prop. 9.

Recta BY est quinta pars Radii AB.

Est enim KQ æqualis rectæ BS, sive BF. Est ergo KQ ad BR ut 5 ad 2; & proinde eadem KQ est ad QR ut 5 ad 1; & KR ad QR ut 6 ad 1. Quare (propter similitudinem triangulorum KYR, KMQ) erit KY ad KM ut 6 ad 5, sive ut 18 ad 15. Sed KM est $\frac{15}{5}$ semiradii BM; ergo KY est $\frac{18}{5}$ ejusdem semiradii BM, id est $\frac{9}{5}$ Radii AB. Cum ergo KA sit $\frac{5}{5}$ Radii AB erit AY $\frac{4}{5}$ ejusdem AB; & BY $\frac{1}{5}$. Quod erat demonstrandum.

Prop. 10.

Recta BR est media proportionalis inter BC & YV, id est $\frac{2}{5}$ ejusdem BC

Cum enim YR æqualis sit $\frac{3}{5}$ & BY æqualis $\frac{1}{5}$ radii AB, quadratum a BR æquale erit decem quadratis a BY, id est rectangulo sub tota BC vel AB, & sub $\frac{2}{5}$ ejusdem AB. Ut ergo radius BC vel AB est ad BR, ita est BR ad YV sive ad duas quintas radii ejusdem BC. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Intervallo B R descriptus arcus quadrantis *b*R*c* est media proportionalis inter arcum BLD, & arcum quadrantis descripti semidiametro YV. Centro enim B intervallo B*f* æquali YV descriptus arcus quadrantis *f g* est ad arcum BLD, id est ad arcum CA descriptum radio BC, ut BR, sive B*b* ad BC; & arcus *b* R*c* ad eundem arcum CA ut B*b* ad BC. Nam arcus similes sunt inter se ut Radii; & recta B*b* est media proportionalis inter B*f* & BC. Quare arcus *b*R*c* est medias proportionalis inter arcum CA & arcum descriptum Radio YV nempe arcum *f g*.

Itaq;

Prop. 11.

Radius BC eſt media proportionalis inter quintuplam dimidiæ Z, & duas quintas arcus BLD.

Supponatur quod recta aliqua, puta BF ſit æqualis quintuplæ dimidiæ Z, Dico radium BC mediam eſſe proportionalem inter BF & duas quintas arcus BLD.

A recta BN auferatur B*d* æqualis ſemiradio BO. Reliqua ergo *d* N erit majus ſegmentum radii BC diviſi extrema & media ratione, per 13 *Eucl.* 1. 2. Subtendit ergo *d* N decimam partem circuli cujus radius eſt BC (per 14. *Euc.* 4.) id eſt quintam partem ſemicirculi BDK, id eſt duas quintas quadrantis BLD. In arcu BLD applicetur recta B*r* æqualis IK. Eſt ergo arcus B*r* æqualis duabus quintis ipſius BLD. Semidiametro BF deſcribatur arcus quadrantis FS*e* ſecans rectam B*r* productam in *s*. Erit ergo arcus F*s* quinta pars arcus FS*e*; cujus duplus ſit F*t*. Eritq; arcus F*t* duæ quintæ arcus *Fe*. Quoniam autem arcus quadrantis deſcripti a Z (per primam) eſt æqualis rectæ BC, erit arcus quadrantis deſcripti a quintupla dimidiæ Z æqualis quintuplæ rectæ BO. Quare arcus F*t* eſt æqualis rectæ BC. Jungatur B*t* ſecans arcum C*u*A in *u*. Erit ergo recta B*u* æqualis radio BC; & arcus C *u* æqualis duabus quintis arcus C*u*A, ſive arcui B*r*. Eſt autem ut BF vel B*t*, nempe quintupla dimidiæ Z ad arcum F*t*, id eſt ad rectam BC, id eſt ad rectam B*u* ita rectaB*u* id eſt BC ad arcum C*v*, id eſt ad duas quintas arcus C*u*A ſive arcus BLD. Eſt ergo recta BC media proportionalis inter quintuplam dimidiæ Z & duas quintas arcus BLD. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 12.

Radius BC eſt media proportionalis inter arcum quadrantis deſcripti a quintupla dimidiæ Z & duas quintas ipſius radii BC.

Supponatur quod arcus FS*e* ſit quintuplus ſemiradii BO.Erit ergo recta BF quintupla dimidiæ Z. Sumatur autem recta B*b* æqualis duabus quintis ipſius *BF*; & deſcribatur quadrans B*bc*. Erit ergo arcus *bc* æqualis ipſi radio *BC*. Sumatur etiam B*f* æqualis duabus quintis radii *BC*. Eritq; ut arcus F*se* id eſt quintuplus ſemiradius ad arcum *bc*, id eſt ad duplam *BO* ſive $\frac{2}{5}$ ipſius arcus F*se*, ita arcus *bc* id eſt recta *BC* ad duas quintas ipſius *BC* ſive ad B*f*. Eſt ergo radius *BC* media proportionalis inter arcum quadrantis deſcripti a quintupla dimidiæ Z & duas quintas radii *BC*. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 13.

Prop. 13.

Ut recta *BS*, nempe ea quæ potest 10 semiradios, ad rectam *AO*, ita est recta *AV* ad *BR* sive *Bc*, sive duas quintas ipsius *BS*.

Cum enim idem radius *BC* sit media proportionalis inter *BS* & *BR*, & inter *AO* & *AV*; erit rectangulum sub *BS*, *BR* æquale rectangulo sub *AO* & *AV*. Ut ergo *BS* ad *AO*, ita reciprocè *AV* ad *BR*. Quod erat demonstrandum.

Prop. 14.

Ut radius *BC* ad semissem rectæ *BS*, sive ad *BX*, ita est *BR* ad semissem radii *BC*.

Quoniam enim rectæ *BR*, *BC*, *BS* sunt continue proportionales, erit ut *BC* secunda ad dimidiam *BS* tertiæ, id est ad *BX*; ita *BR* prima ad dimidiam *BC* secundæ. Quod erat demonstrandum.

Prop. 15.

Ut radius *BC* ad dimidiam quintuplæ semissis *Z*, id est ad $\frac{5}{4}$ *Z*, ita est $\frac{2}{5}$ arcus *BLD* ad semissem *BC*.

Sunt enim quintupla dimidiæ *Z*. Radius *BC*. $\frac{2}{5}$ arcus *BLD* (per 11) continue proportionales. Quare ut secunda *BC* ad semissem primæ, (id est ad $\frac{5}{4}$ *Z*) ita est tertia; nempe $\frac{2}{5}$ Arcus *BLD*, ad semissem secundæ *BC* sive ad *BO*. Quod erat demonstrandum.

Prop. 16.

Ut radius ad semissem arcus *BLD*, ita est *Z* ad semissem radii *BC*.

Sunt enim Arcus *BLD*. Radius *BC*. *Z* continue proportionales. Quare ut *BC* secunda ad dimidiam *BLD* primæ, ita *Z* tertia ad $\frac{1}{2}$ *BC* semissem secundæ. Quod erat demonstrandum.

Prop. 17.

Si centro *B* intervallo *BV* describatur arcus quadrantis *h* V *i*, ducta recta *hi* æqualis erit rectæ B*b* sive duabus quintis rectæ *BS*.

Quoniam *BY* est $\frac{1}{5}$ radii *AB*, & *YV* est $\frac{3}{5}$ ejusdem radii, & angulus *BYV* rectus quadratum a recta *BV* sive B*b* æquale est quinq; quadratis a recta *BY*. Quare quadratum a recta *hi* æquale est decem quadratis ab eadem *BY*. Sed recta *YR* est æqualis triplæ *BY*. Quadratum ergo a *BR*, id est a B*b* æquale est decem quadratis a *BY*. Sunt ergo B*b*, *hi* inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

Prop. 18.

Prop. 18.

Si centro B intervallo B*k*, quod sit æquale semissi rectæ AO describatur arcus quadrantis *k l*; erit recta quæ ipsum subtendit æqualis rectæ *BX*, sive semissi rectæ *BS*.

Quadratum ab *AO* æquale est quinq; quadratis à *BO*. Quare quadratum a semisse ejus *Bk* æquale est quinq; quadratis a dimidia *BO*. Et quadratum a recta *k l* æquale decem quadratis a dimidia *BO*. Sed quadratum a *BX* æquale est decem quadratis a *Ba*, id est decem quadratis a dimidia *BO*. Sunt ergo rectæ *BX* & *k l* inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

Prop. 19.

Describere arcum quadrantis æqualem duabus quintis arcus *BLD*, & in ipso rectam semiradio *BO* æqualem ita accomodare ut a Diagonali *BD* dividatur bifariam.

Centro *B* intervallo *Bf*, quod sit æquale duabus quintis radii *BC* describatur quadrans *Bfg*. Erit ergo arcus *fg* æqualis duabus quintis arcus *BLD*. Centro eodem *B*, intervallo BQ describatur arcus quadrantis *op* secans diagonium *BD* in *q*; Eritq; recta *op* (quæ secat diagonium *BD* in *q*) æqualis radio *BC*; Centro *B*, intervallo quod sit æquale dimidiæ *BQ*, describatur Arcus quadrantis *mn*. Et a punctis *m* & *n* ducantur rectæ *mx*, *ny* parallelæ diagonali *BD* secans arcum *fg* in *x* & *y*. Ducta ergo *xy* est æqualis rectæ *mn*. Et quia subtensa arcus quadrantis descripti radio *BQ* æqualis est radio *AB*, recta quæ subtendit arcum quadrantis descriptum dimidia *BQ* æqualis erit semiradio *BO*. Itaq; descriptus est arcus, &c. Quod erat faciendum.

Prop. 20.

Recta *h i* quam ostendimus (*Prop.*17.) esse æqualem duabus quintis rectæ *BS* sive *BF* transit per puncta *x* & *y*.

Centro *B*, intervallo *BN* (æquali *AO*) describatur quadrans circuli *Bαβ*, jungaturq; *αβ* secans arcum *CuA* in *γ* & *δ*, poteritque recta *αβ* 10 semiradios, & proinde æqualis erit rectæ *BF*. Ducantur *Bx*, *By* & producantur ad arcum *CuA*. Quoniam ergo est ut recta *xy*, (id est duæ quartæ Radii *BC*) ad arcum *fg* duas quintas arcus *CuA*, ita quinq; quartæ radii *BC* ad quinq; quintas arcus, id est ad totum arcum *CuA*, erit recta quæ jungit *Bx*, *By* productas ad arcum *CuA* æqualis $\frac{5}{4}$ radii *BC*. Similiter si sumatur in recta *hi* pars ipsius æqualis ipsi *xy*, divisa item a Diagonali *BD* bifariam, & per

extrema ejus puncta ducantur a puncto B duæ rectæ donec occurrant rectæ $\alpha\zeta$, erit rursus ut xy id est duæ quartæ radii $B\zeta$ ad hi duas quintas rectæ $\alpha\zeta$ ita $\frac{5}{4}$ radii $B\zeta$ ad totam, $\alpha\zeta$ & proinde pars ea ipsius $\alpha\zeta$ quæ intercipitur a rectis ductis a puncto B, æqualis erit $\frac{5}{4}$ radii BC, id est rectæ $\gamma\delta$ quæ jungit Bx, By productas ad arcum CuA.

Rursus quoniam est ut Bx vel By (id est $\frac{2}{5}$ radii BC) ad arcum fg (id est ad $\frac{2}{5}$ arcus CuA) ita radius totus $B\gamma$ ad arcum totum CuA; & ut eadem Bx vel By ad hi (id est ad $\frac{2}{5}$ rectæ $\alpha\beta$) ita radius totus $B\gamma$ ad totam rectam $\alpha\beta$, necesse est ut rectæ Bx, & By productæ incidant in puncta γ, δ. Nulla enim alia recta præter $B\gamma$ & $B\delta$ incidere potest in rectam $\alpha\beta$, quin vel major sit radio BC, vel minor. Cum ergo recta $\alpha\beta$ transeat per puncta γ, δ, etiam recta hi transibit per x & y. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Omnes arcus quadrantum paralleli sunt ad omnes rectas parallelas quæ ipsos secant in rectis Bx, By in ratione arcus CuA ad rectam $\alpha\beta$, propterea quod arcus fg est $\frac{2}{5}$ arcus CuA, & hi $\frac{2}{5}$ rectæ $\alpha\beta$ sive BF.

Itaq; cum arcus OM sit semissis arcus CuA, & recta kl semissis rectæ BF, secabunt se mutuo arcus OM & recta kl in productis Bx, By.

Item quia arcus bc est media proportionalis inter arcum CuA, & arcum fg (nam recta Bb quæ potest $\frac{10}{5}$ radii BC est media proportionalis inter radium BC & rectam Bf) recta autem op (id est radius) est media proportionalis inter BF & $\frac{2}{5}$ ejusdem BF, secabunt se mutuo arcus bc & recta op, in rectis Bx & By productis.

Item quia arcus op est media proportionalis inter arcum CuA, & semissem ejusdem arcus OM, recta autem $\eta\zeta$ sive AO (quæ sunt ut infra ostendetur inter se æquales) media inter BF & semissem ipsius BF (nam BF potest 10 semiradios, & AO potest 5 semiradios (recta $\eta\zeta$ & arcus op secabunt se mutuo in productis rectis Bx & By. Et sic de cæteris.

Prop. 21.

Radi BX describatur arcus quadrantis $\eta X \zeta$; & erit recta $\eta\zeta$ quæ ipsum subtendit æqualis rectæ AO.

Est enim BX, semissis rectæ BS sive BF. Potest ergo BX sive $B\eta$ decem quartas radii BC. Tantundem potest $B\zeta$. Itaq; recta $\eta\zeta$ potest viginti quartas radii BC. Sed recta AO potest quinq; semiradios, id est viginti quartas Radii sive BC. Sunt ergo rectæ $\eta\zeta$ & AO inter se æquales. Quod in præcedente promisimus demonstrare.

Consectarium. Constat hinc rectam $\eta\zeta$ sive AO esse mediam proportionalem inter BF & dimidiam ejus BX vel $B\eta$.

Prop. 22.

Prop. 22.

Recta *bc* quæ subtendit arcum *bc* æqualis est rectæ *AV*.

Nam *BR*, id est B*b*, potest decem quintas Radii *AB*. Tantundem potest B*c*. Quare recta *BC* potest viginti quintas Radii *AB*. Sed recta *AY* (nempe $\frac{4}{5}$ Radii *AB*) potest sexdecem quintas Radii *AB*, & *YV* (quæ est $\frac{2}{5}$ Radii *AB*) potest quatuor quintas ejusdem *AB*. Potest ergo *AV* viginti quintas Radii *AB* sive *BC*, Sunt ergo recta *bc* & *AV* inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Recta *AV* est media proportionalis inter B*b* & ipsius duplum; nimirum, propter triangulum rectangulum & æquicrurum *b*B*c*.

Prop. 23.

Ut semissis arcus *BLD*, id est arcus *OM* ad *BQ* sive rectam *OM* (semissem Diagonalis *BD*) ita est *BQ* sive recta *OM* ad *Z*.

Quoniam enim Radius *BC* est media proportionalis inter Arcum *BLD* & *Z*; & idem Radius media proportionalis inter rectas *BD* & *BQ*, erit ut arcus *BLD* ad rectam *BD*, ita reciprocè *BQ* ad *Z*; & proinde ut semissis arcus *BLD* ad semissem rectæ *BD*, id est ad *BQ*; ita est *BQ* sive recta *OM* ad *Z*. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Recta *BQ* potest quinq; quorum *BR* potest quatuor.

Nam recta *BX* (quæ est semissis rectæ *BF* potest quinquies rectam *QX*. Itaq; (propter Triangula Rectangula similia *BQX*, *BRQ*) *BQ* potest quinquies rectam *QR*. Sed est dimidia *BR*. Quare *BR* potest quater *QR*. Potest ergo *BQ* quinq; quorum *BR* potest quatuor.

Consect. 2. Arcus *op*, est media proportionalis inter arcum quadrantis descriptum Radio qui æqualis sit semissi arcus C*u*A, & Radium. Nam Radius arcus *op* est media proportionalis inter semissem arcus C*u*A & *Z*, nempe radium Radii.

Prop. 24.

Z. Recta *hi*. Arcus *fg* sunt continue proportionales.

Quoniam enim Radius *BC* est media proportionalis tam inter arcum C*u*A & Z quam inter $\frac{2}{5}$ Z & arcum *fg*, erit ut $\frac{2}{5}$ Z ad arcum C*u*A, ita reciprocè Z ad arcum *fg*. Et quia Radius *BC* est etiam media proportionalis inter *BF* & *hi*, erit ut $\frac{2}{5}$ Z ad *BF* ita recta *hi* ad arcum *fg*, sed ut $\frac{2}{5}$ Z ad *BF* ita est Z ad *hi*; nam utraq; ad utramq; est ut 5 ad 2. Quare ut Z ad *hi* ita est *hi* ad arcum *fg*. Sunt ergo Z. Recta *hi*. Arcus *fg*, continue proportionales. Quod erat demonstrandum.

Consect. Arcus quadrantis cujuslibet descripti centro B, si secetur recta quæ sit rectæ hi parallela, terminata in BC & BA, & secante arcum in rectis $B\varkappa$, $B\gamma$ productis, erit ille arcus ad illam rectam in ratione non modo arcûs $C\nu A$ ad rectam BF, sed etiam in ratione rectæ BF ad quintuplam dimidiæ Z.

Prop. 25.

Recta $B\nu$ æqualis est semissi arcus $C\nu A$.

Nam si $B\nu$ semissi arcus $C\nu A$ æqualis non sit, erit vel major eo vel minor. Et sit primo major. Sumatur ergo minor quam $B\nu$, puta $B\varepsilon$ quæ ipsi arcui supponatur æqualis. Et centro B, intervallo $B\varepsilon$ describatur arcus quadrantis $\varepsilon\theta$ secans rectas $B\gamma$, $B\delta$ in $\varkappa$ & λ. Ducaturq; per $\varkappa\lambda$ recta $\iota\mu$ secans BC, BA in ι & θ. Secet autem arcus $\nu\zeta$ rectas $B\gamma$, $B\delta$, in π & ϱ, & rectas BC, BA, in σ & λ. His constructis. Erit ut arcus fg ad rectam hi, ita arcus $\varepsilon\theta$ ad rectam $\iota\mu$. Sed arcus $\varepsilon\theta$ descriptus est Radio æquali semissi arcus $C\nu A$. Quare (per consectarium præcedentis) recta $\iota\mu$ æqualis est arcui quadrantis descripti radio qui est æqualis dimidiæ BF, id est arcui $\nu\zeta$. Rursus quoniam arcus $\nu\zeta$ est descriptus Radio qui est æqualis dimidiæ BF, erit recta $\sigma\tau$ æqualis arcui quadrantis descripti à semissi quintuplicatæ dimidiæ Z, id est a $\frac{5}{4}$ Z. Est autem ut arcus $\varepsilon\theta$ ad rectam $\iota\mu$, ita arcus $\nu\zeta$ ad rectam $\sigma\tau$. Et Ratio quidem arcus $\varepsilon\theta$ ad rectam $\iota\mu$ eadem est quæ arcus fg ad rectam hi, ratio autem arcus $\nu\zeta$ ad rectam $\sigma\tau$ eadem quæ rectæ hi ad Z, id est arcus fg ad rectam hi. Est etiam ut arcus fg ad arcum $\varepsilon\theta$, ita recta hi ad $\iota\mu$ (sive ut modo ostensum est ad arcum $\nu\zeta$.) Sunt ergo arcus $\varepsilon\theta$, recta $\iota\mu$, & recta $\sigma\tau$ continue proportionales. Quod est impossibile. Nam cum sit ut arcus $\varepsilon\theta$ ad rectam $\iota\mu$ id est ad arcum $\nu\zeta$ ita arcus $\nu\zeta$ ad rectam $\sigma\tau$, media proportionalis inter arcum $\varepsilon\theta$ & rectam $\sigma\tau$, erit ea recta, quæ media est inter rectas $\iota\mu$ & $\sigma\tau$. Non est ergo recta $B\nu$ major quam semissis arcus $C\nu A$. Eâdem plane methodo ostendi potest quod recta $B\nu$ non est minor quam semissis arcus $C\nu A$. Nam si sumatur in BC major quam $B\nu$ quæ supponatur æqualis dimidio arcus $C\nu A$, & illa semidiametro, describatur arcus quadrantis, & ducatur recta per intersectiones ejus & rectarum $B\gamma$, $B\delta$ (quibus lineis ducendis in tantula tabula sine confusione non est locus) omnia contingent quæ prius; nisi quod antè major erat Z quam hi nunc vero minor. Est ergo $B\nu$ nec major nec minor quam semissis arcus $C\nu A$, & proinde ipsi æqualis. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Recta BF, quintupla dimidiæ Z, & arcus $C\nu A$ sunt inter se æquales. Et Bc (sive hi) Z, & arcus fg inter se æquales.

Prop. 26.

Prop. 26.

$\frac{5}{2}$ Z & BF ſunt inter ſe æquales.

Cum enim arcus fg. Radius. $\frac{5}{2}$ Z ſint continue proportionales, erunt convertendo, Radius. Arcus fg : : $\frac{5}{2}$ Z. Radius. proportionales. Et ſumpto dimidio Antecedente primo, & duplo Conſequente altero, erunt $\frac{1}{2}$ Radius. Arcus fg : : $\frac{5}{2}$ Z. Duplus Radius, proportionales. Rurſus quoniam recta hi ſive Bb. Radius. BF $\div$ ſunt continue proportionales, erunt convertendo, Radius. Bb : : BF. Radius. proportionales; ſumptoq: dimidio Antecedente primo, & duplo Conſequente ſecundo, erunt $\frac{1}{2}$ Radius. Bb : : BF. Duplus Radius proportionales.

In rectis BF, $B\epsilon$ ſumantur $B\upsilon$, $B\varphi$ utraq; æqualis diagonio BD, eritque $\upsilon\varphi$ æqualis duplo Radio, tangetq; arcum $C\mu A$ in medio ejus puncto. Rectam $\upsilon\varphi$ ſecent productæ $B\gamma$, $B\delta$ in χ & ψ. Erit igitur ut xy (id eſt $\frac{1}{2}$ Radius) ad arcum fg; ita $\frac{5}{2}$ Z ad duplum Radium, nempe ad rectam $\upsilon\varphi$. Radio $B\chi$ deſcribatur arcus quadrantis $\xi\omega$. Erit ergo ut $\frac{1}{2}$ Radius ad arcum fg ita $\frac{5}{2}$ Z ad arcum $\xi\omega$. Sunt ergo duplus Radius ſive recta $\upsilon\varphi$ & arcus $\chi\omega$ æquales. Eſt ergo recta $B\xi$ vel $B\omega$ æqualis duplæ Z. Et quia eſt ut $\gamma\delta$ ad $B\gamma$ ita 5 ad 4, erit $\chi\psi$, æqualis $\frac{5}{2}$ Z. Rurſus quoniam eſt ut $\frac{1}{2}$ Radius ad Bb, id eſt ad hi, ita BF ad duplum Radium, id eſt ad $\upsilon\varphi$ ſive ad arcum $\xi\omega$, erit recta $B\xi$ æqualis duplæ Z. Sunt ergo Bb & Z inter ſe æquales, & pronide etiam BF & $\frac{5}{2}$ Z inter ſe æquales. *Quod erat demonſtrandum.*

Coroll. 1. Manifeſto hinc ſequitur quod etiam arcus $C\mu A$ & $\frac{5}{2}$ Z ſunt inter ſe æquales. Nam oſtenſum eſt in præcedentibus quod $\frac{5}{2}$ Z. BF, et arcus $C\mu A$ ſunt continue proportionales.

2. Duæ quintæ arcus quadrantis eſt media proportionalis inter Radium & duas quintas Radii. Nam oſtenſum eſt Bb ſive PR cui æqualis eſt arcus fg, poſſe decem quintas Radii BC, & per conſequens mediam eſſe proportionalem inter totum Radium BC & duas ipſius quintas.

Prop. 27.

Decem quadrata ab octante perimetri circuli æqualia ſunt viginti quinq; quadratis a quarta parte diametri, vel (quod eodem recidit) quatuor quadrata ab octante perimetri æqualia ſunt decem quadratis a quarta parte diametri.

Cum enim quadratum a BF æquale ſit decem quadratis a BO quarta parte diametri, erit quadratum ab arcu $F\epsilon$ æquale decem quadratis a ſemiſſi arcus $C\mu A$, id eſt ab octante totius perimetri. *Quia* vero BF & quintupla dimidiæ Z. ſunt æquales, etiam arcus quadrantum ab illis de-

 ſcripti

scripti sunt æquales. Sed arcus quadrantis descripti a quintupla dimidiæ Z est æqualis quinq, semiradiis, id est quinq; quartis diametri. Quare quadratum ejus æquale est 25 quadratis a quarta parte diametri. Itaq; decem quadrata ab octante perimetri æqualia sunt 25 quadratis a quarta parte diametri, sive semiradii. Id est (quia est ut 10 ad 25, ita 4 ad 10) quatuor quadrata ab octante perimetri, sive quadratum unum a quadrante perimetri, sive ab arcu C*u*A æquale est decem quadratis a semiradio BO. Quod erat demonstrandum.

B. Ita certe, sed a *Josepho Scaligero* prius quam a te. Nam & ille potentiam perimetri facit decem diametros. Quem errorem confutatum esse nosti a *Clavio*.

A. Quomodo autem confutavit?

B. Ostendens majorem esse rectam illam quæ potest decem diametros quam ea quæ numeris determinata est ab *Archimede*.

A. Videtur ergo *Scaligerum* refutasse non *Clavius*, sed *Archimedes*.

B. Parum refert uter id fecerit. Pone Radium partes habere æquales 10000000. Itaq; semiradius est 5000000; quadratum ejus est 25000000000000. Id decuplatum est 250000000000000. Hujus numeri Radix est 15811, *&c.* At qui *Archimedem* sequuti sunt quadrantem perimetri minorem esse faciunt quam 15708, *&c.*

A. Scio. Et nisi tibi Arithmeticos Cyclometras omnes hac in re deceptos esse clarè ostendam. Et præterea rationem hanc perimetri ad diametrum manifestius adhuc comprobavero, sentias licet cum *Clavio* aliisq; ; atq; etiam cum illis (nisi mores tui id non sinant) conviciare. Interea vero vides quod, nisi hæc vera non sint, quam facile sit arcui quadrantis cujuscunq; rectam exhibere æqualem; & contra, rectam arcui quadrantis, ope rectæ B*y* datæ positione. Nam omnes rectæ quæ sunt paralletæ arcui *h i*, & arcus quadrantum ipsas secantes in rectis B*x*, & B*y* quando opus est productis, sunt inter se æquales.

Prop. 28.

Radius AB assumpta Tangente arcus triginta graduum æqualis est rectæ BF. Ducatur A*z* Secans arcus 30. grad. Jam radius AB est media proportionalis inter secantem arcus 30. graduum, & Sinum grad. 60. Eadem autem AB est media proportionalis inter arcum C*u*A & Z. Quare ut arcus C*u*A est ad Secantem grad. 30. ita est Sinus arcus 60 grad. ad Z. Est ergo etiam ut arcus C*u*A ad potentiam Secantis 30. grad. id est ad radium AB una cum dimidia Secante B*z* (quæ est Tangens arcus 30, graduum) ita sinus arcus 60. graduum ad potentiam ipsius Z, id est ad radium quadrantis cujus arcus est æqualis ipsi Sinui arcus 60. graduum, una cum dimidia ipsius Z. Sed radius quadrantis cujus arcus

arcus æqualis eſt Sinui 60. graduum, poteſt $\frac{3}{4}$ Z. Quare ut arcus C u A eſt ad radium A B plus B z, ita eſt Sinus 60. graduum ad eam quæ poteſt $\frac{3}{4}$ Z una cum ipſa dimidia Z. Arcus $h\,i$ ſecet diagonalem in 2. ducaturque 23 paralella BO ſecans A B in 3; eritque 2 3 æqualis dimidiæ Z, Nam recta B h id eſt B 2 eſt media proportionalis in $h\,i$ & $\frac{1}{2}$ $h\,i$, id eſt inter B 3 † 23 & ipſam 23. Centro 2 intervallo quod ſit duplum rectæ 23 ducatur arcus circuli ſecans A B in μ; eritque quadratum ab μ 2 æquale quatuor quadratis a dimidia Z, & quadratum ab μ 3 æquale tribus quadratis a dimidia Z. Eſt ergo μ 3 radius quadrantis, cujus arcus eſt æqualis Sinui 60 graduum. Eſt autem μ 2 radius quadrantis cujus arcus eſt æqualis A B. Cum ergo ſit ut μ 2 ad 23, ita radius ad ſemiradium; & ut μ 2 ad μ 3, ita radius A B ad Sinum 60 graduum, producta μ 2 incidet in punctum O, quia B O æqualis eſt ſemiradio. Et proinde μ O erit æqualis A B; &, per conſequens, μ B æqualis eſt Sinui 60 grad. Quoniam autem anguli B 23 & 3 B 2 ſemirecti ſunt æquales, etiam rectæ B 2. 23 ſunt æquales. Eſt ergo recta B 3 æqualis dimidiæ Z; & tota μ B (id eſt Sinus 60 graduum) æqualis rectæ quæ poteſt $\frac{3}{4}$ Z una cum dimidia Z. Quoniam ergo eſt ut arcus C u A ad radium A B una cum Tangente 30 graduum, ita Sinus 60 graduum ad eam quæ poteſt $\frac{3}{4}$ Z una cum dimidia Z; & oſtenſum modo eſt Sinum 60 grad. æqualem eſſe ei quæ poteſt $\frac{3}{4}$ Z una cum dimidia Z, erit quoque arcus C u A æqualis Radio A B una cum dimidia ſecante, ſive tota Tangente 30 graduum. Sed B F (per præcedentia) æqualis eſt arcui C u A. Quare radius A B aſſumpta Tangente arcus triginta graduum æqualis eſt rectæ B F. quod erat demonſtrandum.

B. Videtur bene demonſtratum eſſe, ut eſt certiſſime, ſi $h\,i$ & Z ſint æquales, id eſt, ſi vera ſunt præcedentia. Sed res adeo ſubtilis eſſe videtur ut minus fidenter huic quam præcedentibus demonſtrationibus aſſentiar.

A. Age ergo, alia methodo, omiſſa iſta Z, clarius adhuc idem demonſtrabo. En Methodum, quæ ſequitur, alteram, atque etiam tertiam.

Prop. 29.

Deſcribatur rurſus (*Fig.* 2.) quadratum ABCD; dividaturq; a rectis MN, OP ſecantibus ſe mutuo in centro quadrati ad Q in quadrata quatuor æqualia. Ducantur idem diagonales AC, BD, quæ tranſibunt per Q deinde Radiis AB, BC, CD, DA deſcribantur quatuor arcus BLD, CEA, DHP, AGC ſecantes rectas MN, OP, in I,K,S,T; & diagonales AC, BD, in H,L,G,E. Poſtremo producatur AP in directum uſq; ad X, ita ut AX ſit æqualis duplæ MK, id eſt duplo Sinui recto 60 graduum. Dico ductam XD æqualem eſſe duplo Radio AD; & producta

ductâ XD ad BC productam in F, rectam CF æqualem esse tangenti arcus 30 graduum.

Producta enim recta SP donec occurrat producto arcui BLD in V, erit PV Sinus rectus 60 graduum. Itaq; ducta DV erit æqualis radio AB; & ducta VY parallella AD, erit æqualis semiradio; & AY æqualis PV, id est semissi totius AX. Itaq; producta DV ad AX dividetur bifariam in V. Incidet ergo DV producta in X. Est ergo XV æqualis VD, id est Radio AD; & proinde XD æqualis est duplo Radio. Quod est primum. Rursus, quoniam est ut PV Sinus rectus 60 graduum ad Radium CD, ita Radius ad secantem arcus 30 graduum, si producatur XD ad BC productam in F, erit DF ipsa secans arcus 30 graduum; & per consequens CF erit Tangens arcus 30 graduum. Quod erat demonstrandum.

Consect. 1. Recta XF est dupla rectæ BF. Nam XD est dupla Radii DC & DF est dupla CF. Quare & tota XF est dupla duarum DC, CF id est totius BF.

Consect. 2. Omnis pars rectæ XF sumpta ab X dupla est rectæ quæ ipsi parti sumptæ existens contermina ducitur rectæ BF parallela. Nam in triangulo quocunq; quæ ducuntur basi parallelæ sunt inter se ut laterum segmenta.

Prop. 30.

In triangulo rectangulo cujus Hypotenusa est laterum reliquorum unius dupla, potentiæ laterum sunt inter se ut 4.3.1.

Quoniam enim Hypotenusa est dupla lateris unius eorum quæ continent angulum rectum, quadratum ab Hypotenusa erit quadrati ab eodem illo latere quadruplum. Quare potentia Hypotenusæ ad potentiam unius laterum reliquorum est ut 4 ad 1. Sed in triangulo rectangulo potentia Hypotenusæ æqualis est duabus potentiis duorum laterum reliquorum. Quare si a potentia Hypotenusæ, id est a 4 subducatur potentia lateris ejus cujus Hypotenusa est dupla, remanebit potentia lateris reliqui. Deducta autem 1, (potentia unius lateris) a 4 (potentia Hypotenusæ) restant 3. Est ergo 3 potentia lateris reliqui. In triangulo igitur rectangulo cujus Hypotenusa est unius laterum reliquorum dupla, potentiæ laterum sunt inter se ut 4, 3, 1.

Prop. 31.

Si a puncto L quod dividit arcum BLD bifariam ducatur recta lateri CD parallela secans XD in Λ, erit XΛ æqualis diagonali AC.

Ducatur *Lb* sinus rectus arcus *BL*. Deinde ducatur recta LΛ parallela

rectæ XA. Præterea ducatur $\Lambda\Sigma$ ad XA perpendicularis, eritq; $\Lambda\Sigma$ æqualis rectæ *bL*, id est semissi diagonalis *AC*. Quoniam autem est ut XD ad AD ita 2 ad 1, & ita XΛ, ad $\Lambda\Sigma$, erit XΛ dupla rectæ *bL*, id est æqualis diagonali AC. Quod erat demonstrandum.

Prop. 32.

Si per punctum S ducatur recta *e* S parallela rectæ BF secans diagonalem AC in *q*, & rectam XF in *f*, erit recta A*q* æqualis rectæ X Σ.

Cum enim in triangulo rectangulo A*e*S latus AS est duplum lateris *e* S, erit potentia rectæ A *e* tripla potentiæ *e* S. Potest ergo A *e* tres semiradios. Et quoniam angulus A *e q* est rectus, & angulus *e* A *q* semirectus, etiam angulus, *eq* A erit semirectus. Itaq; trianguli A *e q* anguli ad A & *q* sunt æquales; quare & rectæ A *e*, *eq* sunt æquales, quarum utriusq; potentia est 3 semiradii. Quare recta A*q* quæ potest utramq;, potest 6 semiradios. Tantundem autem potest recta XΣ. Est enim XΛ æqualis diagonali AC & proinde potest 8 semiradios, & semissis ejus $\Sigma\Lambda$ potest 2 semiradios, est autem angulus ad Σ rectus; potest ergo XΣ 6 semiradios. Sunt ergo ipsæ A*q*, XΣ (quæ æqualia possunt) inter se æquales. Quod erat demonstrandum.

Prop. 33.

Si fiat triangulum rectangulum cujus Hypotenusa æqualis sit duplæ diagonali AC, & latus minimum sit eidem AC æquale, poterit latus reliquum 24 semiradios.

Producatur *b*L ad *a* ita ut *ba* sit dupla ipsius *b*L, & (per consequens) æqualis diagonali AC. Centro autem *a*, intervallo quod sit duplum ipsius *ba* vel AC describitur arcus circuli secans BA in λ. Itaq; triangulum λba est rectangulum in *b*, & Hypotenusa λa est dupla lateris *ba*. Dico latus λb posse 24 semiradios. Nam diagonalis AC vel *ba* potest 8 semiradios. Quare dupla ejus, id est λa potest 32 semiradios. Ablatis autem 8 a 32 restant 24 semiradii pro potentia lateris λb. Itaq; si fiat triangulum rectangulum, *&c.* *Quod erat demonstrandum.*

Prop. 34.

Idem est punctum X & λ.

Secet *ba* latus CD in *g*. Quoniam ergo utraq; AL, *bg* est æqualis radio, erit LC (nempe excessus diagonalis supra Radium (æqualis *ga* (excessui item diagonalis supra Radium.) Et quoniam λa est æqualis duplæ *ba*, si detrahatur ab λa duplus Radius, id est *XD*, relinquetur dupla

LC, sive dupla *ga*. Sed D*a* pars rectæ DF est dupla rectæ *ga*. Nam ut DF ad CF, id est ut 2 ad 1, ita est D*a* ad *ga*. Recta ergo XD una cum recta D*a* est æqualis duplæ AC, id est rectæ λ*a*. Sunt ergo X*a*, λ*a* inter se æquales. Est ergo X & λ idem punctum. Quod erat demonstrandum.

Prop. 35.

Recta quæ potest 3 semiradios assumpta quarta parte Diagonalis, poterit 6 semiradios.

Producatur AL ad latus BC in R. Intersectio autem duarum rectarum OQ & BR sit in *r*. Juncta ergo A*r* potest 3 semiradios. Nam *br* potest unum semiradium, & A*b* duos semiradios. Producta autem A*r* ad latus BC incidet in R. Est enim ut *Ar* quæ potest 3 semiradios ad *br* quæ potest unum semiradium, ita AR quæ potest 6 semiradios (nam AB potest 4 semiradios, & BR duos semiradios) ad BR. Sumatur jam in recta RB pars ejus R*s* æqualis dimidiæ BR, id est quartæ parti diagonalis AC. Et in recta AD sit sumpta A*t* æqualis rectæ A*r*; jungaturq; *ts*. Jam tam A*r* quam A*t* (quarum utraq; potest 3 semiradios) potest 6 rectas R*s*; & ipsa R*s* unam R*s*. Est ergo A*r* ad R*s* ut ea quæ potest 6 ad eam quæ potest 1. Et ut A*r* ad R*s* ita est utraq; simul A*r* & A*t* ad R*s* bis sumptam. Jungatur *ts*. Si ergo *ts* transeat per *r* erunt R*r*, & R*s* inter se æquales; & per consequens AR quæ potest 12 quartas partes diagonalis AC, superat A*r* quæ potest 6 quartas partes diagonalis ejusdem AC, tanto quanto est quarta pars diagonalis AC. Quod est propositum. Sin R*r* non sit æqualis R*s*, sumatur a puncto R in ipsa recta RA alia quædam *Ru* ipsi *Rs* æqualis; ductaq; *su* producatur ad latus AD in *h*. Eruntq; (propter *Ah*, *Rs* parallelas) triangula R*us*, *Auh* similia. Et quoniam latera *Rs*, *Ru* trianguli *Rus* sunt æqualia, erunt quoq; latera *Ah*, *Au* trianguli *Ahu* inter se æqualia. Quod est absurdum. Nam rectæ *sh*, *st* non possunt esse parallelæ, quia ducuntur ambæ a puncto *s*. Itaq; cum *At*, *Ar* sint æquales, rectæ *Ah*, *Au* non possunt esse æquales. Sunt ergo *Rs* & *Rr* æquales; & per consequens *Rr* est æqualis quartæ parti diagonalis AC. Quare differentia inter *Ar* quæ potest 3 semiradios, & AR quæ potest 6 semiradios est æqualis quartæ parti diagonalis AC. Quod erat demonstrandum.

B. Manifestum est. Pergo ad cætera.

Prop. 36.

Ducta XP & producta transibit per L, & secabit omnes rectas parallelas rectæ BF, interceptasq; inter XB & XF, bifariam.

Est

Est enim ut ea quæ potest 12 semiradios (id est ut XA) ad eam quæ potest unum semiradium (id est ad AP) ita ea quæ potest 24 semiradios (id est X*b*) ad eam quæ potest 2 semiradios, id est ad *bL*. Quoniam ergo AP & *bL* sunt parallelæ, & Anguli ad *A* & *b* recti, ducta XP transibit per *L*. Secundo quoniam XP secat AD bifariam, eadem producta secabit omnes rectas ipsi AD parallelas, quæ intercipiuntur inter XA & XD productas, bifariam. Quod erat demonstrandum.

Corollarium. XL dividit arcum BLD ita ut pars una sit ad reliquam ut 1 ad 1.

Prop. 37.

Si *AD* divisa sit in *d*, ita ut *Ad* sit $\frac{1}{3}$ totius *Ad*, ducta *Xd*, & producta transibit per punctum S.

Quoniam enim est ut $\sqrt{12}$ ad $\sqrt{27}$ ita $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{9}$, & ut $\sqrt{4}$ ad $\sqrt{9}$ ita $\sqrt{\frac{1}{9}}$ ad $\sqrt{\frac{1}{4}}$, erit ut $\sqrt{12}$ ad $\sqrt{27}$ ita $\sqrt{\frac{1}{9}}$ ad $\sqrt{\frac{1}{9}}$. Est autem *Ad* $\sqrt{\frac{1}{9}}$ Radii BC; (nam *Ad* est tertia pars Radii) quare *Xd* producta ad *eS* abscindet partem ejus quæ erit $\sqrt{\frac{1}{4}}$ BC. Abscindet ergo ipsam *eS*; (nam quadratum ipsius *eS* est æquale quartæ parti quadrati a Radio BC.) Transit ergo *Xd* producta per punctum *S*. Quod erat demonstrandum.

Aliter.

XA est ad *Xe* (per constructionem) ut 2 ad 3. Item *Ad* est ad *AP* sive *eS* (per Hypothesim) ut 2 ad 3 est ergo ut *XA* ad *Xe*, ita *Ad* ad *eS*. Ducta ergo *Xd* & producta transibit per *S*. Quod erat demonstrandum.

Consectarium 1. *Xd* producta ita secat arcum BLD ut pars minor sit ad reliquam ut 1 ad 2. Est enim arcus BS tertia pars totius arcus BLD.

Consect. 2. Productâ *eS* ad XF in *f*, manifestum est, cum sit *Ad* $\frac{1}{3}$ *AD*, totam *ef* triplam esse semiradii *eS*; minorem autem arcu BLD.

Consect. 3. Manifestum quoq; est omnes rectas quæ sunt parallelæ *AD*, & interceptæ inter XB, & XF secari ab eadem *Ad* producta in ratione *Ad* ad *dD*, id est in ratione 1 ad 2.

Prop. 38.

Si recta *Ad* secetur bifariam in *i*, ducta *Xi* & producta secabit arcum BS bifariam.

Ducatur *Xi* & producatur ad arcum BS in *c* secans *eS* in *p*. Quoniam ergo in triangulis *XAd*, *XeS* bases *Ai*, *eS*, interceptæ sunt parallelæ,

rallelæ, & X i secat A d bifariam, secabit bifariam quoq; eS, puta in p. Dividitur ergo e S bifariam in p. Dico eandem X p productam secare arcum BS bifariam in c.

In latere BC sumatur Bo æqualis chordæ arcus BS; & in latere AD sumatur eidem chordæ æqualis A n; ducaturq; o n secans XS productam in m. A puncto autem m ducatur ad latus AB perpendicularis m l. Deinde centro n, Radio n o (qui est æqualis Radio AB) ducatur arcus circuli indefinitè. Quoniam jam l m (æqualis Bo) est æqualis chordæ arcus BS, erit semissis ipsius l m æqualis Sinui recto arcus graduum 15. Arcus autem 15 graduum sumptus ab o in arcu qui describitur Radio n o, æqualis est arcui 15 graduum sumpto a B in arcu BS; & utriusq; Sinus rectus est semissis rectæ l m. Quare duo arcus, quorum alter describitur a Radio AB, alter a Radio n o secabunt se mutuo in medio rectæ l m. Sed quoniam l m & e S sunt parallelæ, & ambæ terminatæ in rectis X l, X m, recta X p quæ secat e S bifariam, secabit quoq; l m bifariam. Secat autem in c. Est ergo l c Sinus rectus arcus 15 graduum sumptorum in arcu BS; & c m Sinus rectus arcus 15 graduum sumptorum in arcu descripto Radio n o. Itaq producta recta X i dividit arcum BS bifariam. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Eadem methodo ostendi potest, Quod bisecta rursus A i in x, juncta X x & producta secabit arcum B c bifariam. Et sic perpetuò ab eodem puncto X rectæ ductæ per partes ipsius A d ortas ex bisectione, bisecabunt etiam arcum quæq; sibi respondentem.

Prop. 39.

Recta BF est æqualis arcui BLD.

Producatur recta l c ad occursum rectæ XF in α, & erit ut A i ad AD, ita l c ad l α. Sed A i est sexta pars lateris AD. Ergo & l c est sexta pars rectæ l α. Est ergo l α æqualis 6 Sinubus rectis arcus b c, id est 6 Sinubus rectis sextæ partis arcus BLD. Est autem arcus B c major quam Sinus suus l c. Totus igitur arcus BLD major est quam tota recta l α. Similiter quia X x producta dividit arcum B c bifariam, Sinus rectus dimidii arcus B c productus ad XF erit duodecuplus ejusdem Sinus. Arcus autem totus duodecuplus dimidii arcus B c. Est autem dimidius arcus B c, major quam Sinus suus. Quare & totus arcus BLD major est quam duodecuplus Sinus dimidii arcus B c, id est quam Sinus dimidii arcus B c productus ad XF. Atq; ita continget per omnes bisectiones ulteriores. Omnis ergo recta parallela BF, & intercepta inter rectas XB & XF minor est quam arcus BLD. Non est ergo recta BF major quam arcus BLD. Minor autem esse non potest. Recta enim parallela ipsi BF, & intercepta inter XB, & XF quantulumcunq;

pro-

productas, major erit omnibus simul Sinubus rectis arcuum æqualium ortorum ex bisectione etiam æterna. Non est ergo recta BF aut major aut minor quam arcus BLD. Restat ergo ut illi sit æqualis. Quod erat demonstrandum.

B. Absq; dubio ita est. Recta BF arcui BLD æqualis est exactissimè. Neq; quisquam, credo, est qui negabit.

A. Non videris ingenium humanum satis explorasse, qui sic credis. Homines enim ad contemptum pecuniæ nondum exculti accedunt ad scientiarum studium lucri causa. Eorum ergo interest, si volunt magnis mercedibus conduci, ut non videantur Artium quas profitentur quoquam alio esse imperitiores. Præterea quotus quisq; est qui, cum Problema aliquod ex difficilioribus solutum esse a se publicè prædicaverit & deceptus fuerit, emanantem aliunde veritatem quantum potest & quamdiu color aliquis inveniri potest, ad tuendam existimationem suam supprimere non conabitur? An fœdissimos illos errores quos prioribus colloquiis in Scriptis *Wallisii* animadvertimus, confitebitur *Wallisius*? Nihil minus.

B. Tecum sentio.

A. Propositionis hujus 38 veritatem confirmabunt non nihil, & valdè illustrabunt quæ nunc dicturus sum. Semidiametris AP, A d, A i, A x, describantur quadrantes, quorum arcus sint MP, kd, yi, zx. Imaginare autem dum producuntur rectæ XP, XA, una promoveri puncta A, & P, usq; ad arcum BL. Nonne ergo, cum arcus MP & BL sint æquales, & producta XP transit per L, nonne inquam rectæ X d, X i, X x, singulæ abscindent partes arcus BL ipsis A d, A i, A x, proportionales? Et quoniam arcus MP, coincidit cum arcu BL, & arcus kd, cum arcu BS, nonne cæteri quoq; arcus yi, zx coincident quoq; cum partibus arcus BL sibi æqualibus? Ex quo sequetur, ut prius rectam BF æqualem esse arcui BLD.

B. Sine dubio coincident omnes cum suis æqualibus, propterea quod congruunt in tribus punctis B, S, L. Alioqui dubitarem ne ex una parte magis extendi possent quam ex altera. Nunc autem videtur hæc ipsa etiam per se planissima demonstratio; & eadem quam scripserat *Hobbius* Cap. 20 *de Corpore*.

A. Ita est.

B. Cur ergo quod bene scripserat retractavit?

A. Confisus demonstrationibus suis non dubitavit quin idem sentiret *Archimedes*. Postea verò cognito quod discreparent inter se Methodus Geometrica sua, & *Archimedis* Arithmetica, quæ rectè scripta erant, quantum potuit ad consensum cum calculo *Archimedis* cœpit detorquere. Quod cum non successit, totum illud caput induxit; & denuò rem aggressus non sensit delapsus in eosdem numeros, antequam

U 3 librum

librum edidisset. Itaq; iterum demonstrationem suam ad verisimilitudinem revocavit, reverentia *Archimedis*. Tantum absuit ut doctos homines seculorum antecedentium parvi faceret (quod dicunt adversarii) ut veritatem ipsam propter eorum existimationem deseruerit, & penè prodiderit. Quod etiam ante eum fecit *Josephus Scaliger*, sed ἀμυνικωτέρως. Nam *Hobbius* conclusionem quam abjecerat resumptam in eodem libro Anglicè edito, ut videtur (nam tacent adversarii) demonstravit.

B. De veritate conclusionis non amplius dubito. Veruntamen habeo quæ te interrogare velim pauca quædam, & (ut mihi videntur) necessaria. Primò, quî sciam rectam BF posse decem semiradios? Ostende igitur quod recta BF composita ex Radio BC & Tangente arcus 30 graduum potest decem semiradios.

A. Demonstratio sequitur.

B. Ignosce quod respexeram, non prospexeram.

Prop. 40.

Recta BF potest decem semiradios.

Ducantur rectæ Bq, tq, quarum tq erit latus quadrati Aq, junctaq; Xq producatur ad BC in μ. Producatur quoq; tq ad idem latus BC in ξ. Deinde ducta $q\nu$ dividat angulum $\xi q \mu$ bifariam; itaq; eadem $q\nu$ producta ex parte q dividet quoq; angulum Xqt bifariam. In recta Xq sumatur qo æqualis $q\xi$, jungaturq Bo quæ producta secet νq, ξq, productas in π & ρ. Sunt ergo quatuor anguli ad q, nimirum $\xi q\nu$, $\nu q\mu$, $\rho q\pi$, $\pi q o$ inter se æquales. Producatur Bq utcunq; in x, eritq angulus $Bq\xi$ æqualis angulo $xq\mu$ (ut mox demonstrabitur. Si igitur angulo $Bq\xi$ addatur angulus $\xi q\nu$, & angulo $xq\mu$ addatur angulus $\nu q\mu$ (ipsi $\xi q\nu$ æqualis) erunt anguli $Bq\nu$ & $xq\nu$ (anguli deinceps super rectam Bx) inter se æquales; & propterea uterq; est rectus. Itaq; similia sunt triangula $Bq\nu$, $B\xi q$; & proinde anguli eqB, $\xi q\nu$, id est eqB, $\pi q o$ sunt inter se æquales. Est ergo angulus Xqe recto minor, tanto quantus est angulus eqB, sed angulus ex BLq est recto minor tanto quantus est angulus eqB. (Nam angulus rectus Xeq æqualis est utriq; simul angulo XBq, eqB.) Sunt ergo anguli XBq, XqB æquales. Quare etiam rectæ XB, Xq æquales sunt. Sed recta Xq potest 30 semiradios (potest enim Xe 27, & eq 3 semiradios). Ergo & XB potest 30 semiradios. Et quia XF est dupla BF, potest XF 40 semiradios, & BF 10 semiradios. Quod erat demonstrandum.

Restat probandum quod anguli $xq\mu$, $Bq\xi$. Sunt æquales. Quod sic ostendo. Quoniam angulus $\xi q\mu$ dividitur bifariam a recta $q\nu$, erit ut $\mu\nu$ ad $\nu\xi$; ita μq ad ξq, id est ad qo. Dividit ergo recta Bq angulum

gulum $\xi q o$, in eandem rationem in quam recta $q \nu$ dividit $\xi q \mu$ id est bifariam. Sunt igitur anguli $Bq\xi$, $Bq\sigma$ inter se æquales. Sed angulus Bqo æqualis est verticali suo $xq\mu$. Sunt ergo $xq\mu$, $Bq\xi$ inter se æquales, ut erat assumptum.

Aliter.

A puncto B ad rectam $X\mu$ ducatur perpendicularis, & in ea sint puncta o, π, ρ. Est ergo angulus Boq æqualis duobus angulis $o\pi q$, $\pi q o$; & angulus $B\xi q$ æqualis duobus angulis $\xi \nu q$, $\xi q \nu$. Sunt igitur duo anguli $\xi q \nu$, $\xi \nu q$ æquales duobus angulis $o\pi q$, $\pi q o$. Sed angulus $\xi q \nu$ æqualis est angulo $\pi q o$. Quare & angulus $\xi q \nu$ est æqualis angulo $o\pi q$. Itaq; anguli $B\nu q$, $B\pi q$ sunt æquales. Sed & anguli recti ad ξ & o sunt æquales. Quare omnes anguli trianguli $B\xi q$ æquales sunt omnibus angulis trianguli Boq; sumptis maximo ad maximum, minimo ad minimum, medio ad medium. Habent autem triangula $B\nu q$, $B\pi q$ latus Bq commune. Quare etiam latera lateribus angulos æquales subtendentia sunt æqualia. Sunt ergo rectæ νq, πq æquales; & proinde angulus $Bq\nu$ est rectus, & angulus $\xi q \nu$ æqualis angulo $Bq\rho$ sive $qB\xi$; & angulus oqB (id est XqB) æqualis est angulo XBq. Rectæ ergo XB & Xq sunt inter se æquales. Sed recta Xq potest 30 semiradios. Ergo & XB potest 30 semiradios. Quod erat, &c.

B. Assentior. Sed quando veniemus ad calculum Arithmeticum?

A. Paulo inferius, sed non concordabit cum modo demonstratis.

B. Mirum ergo ni quæ pro demonstratis habuimus demonstrata non sint.

A. Ne metue; nam discordia hæc apparens non nostra est erratio, sed orta a prava vel male intellecta definitione puncti atq; etiam lineæ (tanquam essent indivisibilia) quædam γοντῖα, sicut ego facile, ut puto, ostensurus sum.

Prop. 41.

Linea omis recta comparata cum curva consideranda est ut habens latitudinem. Centro A radio Aq ducatur arcus $q\sigma$ secans AD productum in σ, jungiturq; $X\sigma$, $e\sigma$. Quoniam ergo XA potest 12 semiradios, & $A\sigma$ potest 5 semiradios; poterit $X\sigma$ 18 semiradios. Et quia $A\sigma$ potest 6 & A e 3 semiradios, poterit $e\sigma$ 9 semiradios. Sed Xe potest 27 semiradios, id ambas rectas X σ, e σ. Est ergo angulus $X\sigma e$ rectus. Producatur recta Xσ in τ, ita ut $X\tau$ æqualis sit duplæ AN, id est duplæ ejus quæ potest quinq; semiradios. Poterit ergo $X\tau$ 20 semiradios. Quoniam ergo est ut eX quæ potest 27 semiradios ad $e\sigma$ quæ potest 9 semiradios, ita BX quæ potest 30 semiradios ad eam

quæ

quæ poteſt 10 ſemiradios; & iterum ut e X quæ poteſt 27 ſemiradios, X ad ~~$X\sigma$~~ quæ poteſt 18 ſemiradios, ita BX quæ poteſt 30 ſemiradios, ad ad $X\tau$ quæ poteſt 20 ſemiradios, erunt $B\tau$ & $e\sigma$ parallelæ, & uterque angulus $B\tau X$, $e\sigma X$ rectus. Quoniam autem juncta $B\sigma$ poteſt duas rectas $A\sigma$, AB quarum hæc poteſt 4, illa poteſt 6 ſemiradios poterit $B\sigma$ 10 ſemiradios. Sunt ergo $B\sigma$, $B\tau$ æquales, & proinde ambo puncta σ & τ erunt in eodem arcu circuli cujus centrum eſt B, radius $B\sigma$. Cum ergo $B\tau$ ſit ducta ex centro, recta $X\tau$ tangit circulum in τ. Quare recta $X\sigma$ circulum eundem ſecabit. Sunt autem σ & τ in eadem recta $X\tau$ per conſtructionem. Eadem ergo recta tanget circulum eundem in τ & ſecabit in σ. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo recta $X\sigma\tau$ ſine latitudine per quam poſſit latus ejus exterius circulum tangere & latus interius ſecare eundem circulum. Si ergo comparetur recta & curva neutra earum conſiderari poteſt ſine latitudine. Quod erat demonſtrandum.

B. Etſi mira mihi hæc videantur, nihil habeo tamen quod dicam in contrarium. Sed ita ſunt ſubtilia ut non poſſim ſine majore adhuc luce intimam tanti Paradoxi cauſam, ut cupio, comprehendere. Expectabo igitur calculum Arithmeticum.

A. Calculus Arithmeticus parum te juvabit, quod ipſe facile prævidere potes, qui noſti neq; lineæ rectæ & curvæ, neq; quadrati & circuli ullam partem aliquotam eſſe poſſe communem; & proinde nullum illis eſſe commune *Unum*, quod haberi neceſſe eſt in omni comparatione quantitatum Arithmetica. Veniamus tamen ad Calculum. Quod rectangulum ſub lateribus duorum quadratorum medium eſt proportionale inter ipſa quadrata ſatis noſti. Nam ſi fuerint duo quadrata AA, BB, erunt AA, AB, BB continuè proportionalia; quia ut A ad B, ita eſt tam AA, ad AB, quam AB ad BB. Scis etiam quod ſi duo quadrata AA, BB, conſtituantur deinceps ita ut eorum utriuſq; duo anguli oppoſiti ſint in eadem recta, rectangulum AB erit unum ex complementis ad quadratum a tota $A + B$. His intellectis quæremus potentiam recti XQ. hoc modo. Recta XA æqualis eſt (per conſtructionem) duplo Sinui recto arcus 60 graduum. Quoniam ergo Sinus ille rectus poteſt 3 ſemiradios, poteſt XA, quæ ejus dupla eſt 12 ſemiradios. Poteſt autem AB 4 ſemiradios. Quare utrumq; ſimul quadratum æquale eſt 16 quadratis à ſemiradio. Eſt autem rectangulum ſub AX & AB medium proportionale inter 12 & 4 quadrata a ſemiradio. Quare rectangulum ſub XA, AB eſt, $\surd$ 48, idemq; duplicatum fit radix 48 quadruplicati ſive $\surd$ 192, id eſt $13\frac{23}{27}$ proximè. Tantum ergo valent ambo ſimul complementa quadrati ab *XB*. Totum ergo quadratum ab *XB* æquale eſt $12 + 4 + 13\frac{23}{27}$ id eſt $29\frac{23}{27}$, quod minus eſt quam 30 quadrata a ſemiradio. Quod prædixi tibi fore. Nam ut fieret 30 quadrata, opo tuit rectangulum

angulum sub XA, AB esse $\surd$ 196. Vides ergo calculus Geometricus & Arithmeticus quantum inter se differunt. Simili Methodo quadratú ab XF invenietur minus quam 40 quadrata semiradii. Potest enim XD (duplus radius) 16 semiradios: & DF Secans $5\frac{1}{3}$ semiradios (nam Sinus rectus arcus 60 graduum. Radius. Secans arcus 30 graduum, sunt continuè proportionales in ratione $\surd$ 3 ad $\surd$ 4. Quare Secans DF est $\surd$ $5\frac{1}{3}$ semirad.) Rectangulum ergo sub XD & DF est $\surd$ $85\frac{1}{3}$; & duplum ejus est $\surd$ $341\frac{1}{3}$, id est $18\frac{17}{36}$ proxime. Itaq; totum quadratum ab XF æquale est $16 + 5\frac{1}{3} + 18\frac{17}{36}$ semiradiis, id est $39\frac{29}{36}$ semiradiis proxime. Id quod rursus minus est quam 40 semiradii.

B. Equidem stupeo ad hæc, & vereor ne subsit novæ methodo calculi aliquod θαυματούργημα. Scio rectam quæ sit tripla rectæ A*e*, sive Sinus recti arcus 60 graduum posse 27 semiradios; cum certissimum sit ipsum Sinum posse tres semiradios. Vide si idem probabitur methodo hac tua.

A. Recta XA potest 12 semiradios, & recta A*e* tres semiradios; summa amborum quadratorum est 15 quadrata semiradii. Medium proportionale inter 3 & 12 est $\surd$ 36. Duplum hoc medium est Radix quadruplicati 36, id est $\surd$ 144. id est 12. Itaq; aggregatum ex 3, 12 & 12, id est 27 æquale est quadrato totius *X e*.

B. Videtur ergo recta quæ a D transit per *f*, id est recta quæ ducta a centro *A* transit per *S*, & terminatur in Tangente BC non esse Secans arcus 30 graduum; id quod certe Geometris ferè omnibus videbitur prodigiosum.

A. Sed quæ videntur prodigiosa causa rei nondum percepta, percepta aliter videbuntur. Putasne quadrantem circuli ABD divisibilem esse in Sectores semper divisibiles?

B. Certe. Est enim quantitas.

A. Et diagonalem AC dividere quadrantem ABD bifariam in L?

B. Etiam.

A. Et duos semisses ita divisi quadrantis, nimirum duos sectores BLA, LDA æquare totum ABD?

B. Quidni?

A. Et, siquidem tu auferres alterum duorum sectorum *Parisios* usq;, ego alterum hic retinerem, illos tamen sectores esse duos?

B. Proculdubio.

A. Et concurrere latera utriusq; in duobus punctis, quorum unum esset hic, alterum *Parisiis*?

B. Certissime. Sed quorsum hæc?

A. Ut videas punctum A id est centrum circuli dividi in tot centra, in quot Sectores dividitur quadrans; & proinde centrum circuli non esse punctum indivisibile, sed habere magnitudinem, etsi magnitudinem

tudinem illam non sit necesse semper considerari, id est venire in demonstrationem.

B. Quare autem punctum aliquando consideratur, aliquando non?

A. Quia magnitudo ejus quibusdam binis quantitatibus communis esse potest, ut duabus rectis; quibusdam autem binis quantitatibus communis esse non potest ut rectæ & curvæ. Itaq; punctum A commune non est Radio & circumferentiæ, & proinde in comparatione Radii & circumferentiæ sumi pro unitate non potest. Nam si centrum (cum habeat magnitudinem) sumatur pro nihilo, omnes rectæ ductæ inde ad circumferentiā considerandæ sunt ut totidem Sectores. Sin sumatur pro quanto, tum linea recta cujus centrum A est terminus habebit latitudinem aliquam, quam diagonalis AC dividet bifariam. Rursus pars utravis centri A, a recta quæ dividet utrumvis Sectorum secabitur in duas partes. Secabit ergo recta illa (exempli causa), quæ ducta ab S Sectorem cujus arcus est BL, secat in ratione 3 ad 2, extra punctum A. Est ergo recta AB rectangulum Parallelogrammum minutum, habens quatuor angulos rectos & quatuor latera, quorum duo latera opposita bifariam dividit recta NM, & reliqua duo opposita latera bifariam dividunt puncta *A* & *B*. Itaq; si ab angulo exteriore rectanguli AB, qui est ultra *A*, ducatur ad *S* linea recta & producatur ad BC erit ea major quam est *AS* etiam producta ad idem latus, & quæ vulgo habetur pro Secante vera arcus *BS*. Atq; hinc etiam sequitur quod Tangens minuti alicujus arcus, si Secans ejusdem arcus ducatur a puncto *A*, minor esse potest quam arcus ipse, Nam triangulum rectangulum quod fit à Radio, Sinu recto, & Secante habet pro uno latere extremam lineam rectam quadrantis, id est lineam extimam rectanguli *AB*.

B. Itaq;, ut ante recta X τ tangebat arcum $\sigma\tau$ in τ, & secabat in σ, ita nunc una eademq; recta *AB*, (id est rectangulum exilissimum *AB*) latere suo interiore secat arcum *CGA*, ad A, & latere exteriore eundem tangit. Et quoniam linea circularis æque lata supponenda est atq; ipse Radius, idem rectangulum tanget arcum eundem in duobus punctis, quorum alterum est in *CGA* convexa, alterum in *CGA* concava. Nam Curvitas ne intelligi quidem potest sine convexo & concavo. Nonne id vis?

A. Tenes.

B. Sunt hæc acutissima quidem, sed tamen vera. Et revocant in mentem mihi quam habui olim quasi ἀρχὴν τῦ γεωμετρεῖν. Vidi forte librum Elementorum *Euclidis* in *Bibliotheca* quadam, fortuito apertam ad *Prop.* 47. *El.* 1, Et cum legissem hæc verba. *In rectangulis triangulis quadratum quod a latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.* Ego continuo, etsi verum sit (inquam) sciri tamen ab homine

non

non poteſt, ignarus ſcilicet rerum Mathematicarum. Inſpiciens autem demonſtrationem ſtatim rejectus ſum ad *Prop.*36. Et inde ad alias uſq; ad principia. Intellecta demonſtratione animadverti quod longitudinem ſubtendentis angulum rectum *Euclides* vel *Pythagoras* (vel quiſquis ille fuerit Propoſitionis 47 inventor) menſurabat (juxta *Prop.* 36.) per laterum rectum angulum continentium latitudines, id eſt, ut nunc loquuntur, per indiviſibilia. Quod nunquam potuiſſet facere, ſi lineæ ſine latitudine ſemper conſiderandæ eſſent.

A. Sic eſt. Itaq; recta quam *Archimedes* intra ſuos numeros concluſit, *Peripheria* circuli minor evadere debuit.

B. Veritatis hujus, nempe quod aliud eſt *non eſſe*, aliud *non computari* (quam primus docuit nos *Hobbius*) ignoratio, multorum abſurdorum Mater fuit.

A. Quod erravit *Wallis* in computatione *Spiralium* ab aliis animadverſum eſt; erroreſq; ejus tum hic tum in multis aliis locis ortum habuerunt ab ignoratione naturæ *puncti*, *lineæ* & *Superficiei*. Etiam propoſitionem ejus ſecundam *Arithmeticæ Infinitorum*, idem infecit error, quem errorem quam abſurdæ ſequantur propoſitiones uno exemplo nunc indicabo.

Arithmeticæ Infinitorum Walliſii Propoſitio ſecunda hæc eſt. *Si ſumatur ſeries quantitatum Arithmeticè proportionalium (ſive juxta naturalem numerorum conſequutionem) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum, erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium ut* 1 *ad* 2. Sumamus jam (in *Fig.* ſecunda) triangulum ABO, quam ſupponamus diviſam eſſe in partes aliquotas quotcunq; & quatenus fieri poteſt numero infinitas. Et ſit *A* punctum, vel o. Erit ergo *AB* ſeries quantitatum Arithmeticè proportionalium, a puncto ſive o inchoatarum. Itaq; ductæ rectæ ipſi *BO* per omnes diviſiones rectæ *AB* terminatæq; in recta *AO* erunt quoq; Arithmeticè proportionales, & inchoatæ a puncto, (nempe a puncto *A*) ſive o. Eruntq; propterea illæ parallelæ ſimul omnes ad toties ſumptam *BO*, ut 1 ad 2. Quod eſt veriſſimum. Nam creſcentes parallelæ conſtituunt planum *ABO*; totidem autem æquales maxime *BO* conſtituunt rectangulum *AO*. Et eſt illud triangulum ad hoc rectangulum ut 1 ad 2. Sed eſt ut quælibet creſcentium ad quamlibet creſcentium, ita perimeter circuli ex illa deſcripti ad perimetrum circuli ex hac deſcripti. Itaq; perimetri circulorum deſcriptorum a ſingulis parallelis creſcentibus ſunt quoq; Arithmeticè proportionales, eædemq; inchoatæ a puncto ſive o. Conſtituunt autem ſuperficiem Coni Iſoſcelis, cujus baſis eſt circulus deſcriptus Radio *BO*, & cujus latus eſt recta AO. Totidem autem perimetri circulorum æqualium maximo, cujus Radius eſt *BO* conſtituunt ſuperficiem *Cylindri* cujus baſis eadem eſt cum baſe

Coni, & altitudo eadem. Est ergo superficies Coni cujus latus est AO, & cujus Radius diametri *BO*, ad superficiem *Cylindri* eandem habentis basem & altitudinem ut 1 ad 2. Atq; hoc manifestè sequitur ex propositione secunda Arithmeticæ Infinitorum *Wallisii*. Videamus an sit verum. Latus *Cylindri* recti cujus basis est circulus descriptus Radio *BO*, est æquale ejusdem circuli diametro. Quare & latus AB est etiam media proportionalis inter ipsum & diametrum Cylindrii sui; nimirum propter æqualitatem altitudinis & basis. Ergo per *Prop.* 14. libri primi *Archimedis* de Sphæra & Cylindro, superficies Cylindri hujus æqualis est circulo descriptio Radio AB, id est circulo quadruplo ejus qui describitur Radio *BO*, id est superficiei Sphæræ in qua maximus circulus est, is qui describitur radio *BO*. Sed per *Prop.* 16. ejusdem libri primi de Sphæra & Cylindro, omnis Coni Isoscelis superficies est ad basem ut latus ad radium basis. Sit jam Conus Isosceles cujus latus sit AS, æqualis Radio AB & Radius basis *e* S, æqualis BO. Quoniam ergo est ut superficies Coni ad basem ejusdem, ita latus AS ad BO erit superficies Coni cujus latus est AS, & Radius basis BO (id est ½ AS) ad superficiem Cylindri eandem habentis altitudinem & basem ut 1 ad 2. Est ergo superficies Coni cujus latus est AS vel AB, & Radius basis *e S* æqualis superficiei Coni cujus latus est AO (major quam AS) & Radius basis BO (æqualis *e S*) Quod est impossibile. Falsa est ergo Propositio illa secunda Arithmeticæ Infinitorum *Wallisii*. Et propter hanc solam causam falsa est quod non videret non omnia puncta esse inter se æqualia.

B. Miror non vidisse hæc *Schooten* & *Hugenium* *Wallisii* encomiastas, neq; etiam *Robervallum*, qui cum aliqua in libris *Wallisii* rectè reprehenderit, totam ejus Arithmeticam Infinitorum reliquam (excepto Paralogismo quem habet circa Spiralem) ita deglutiit ut suã esse dixerit.

A. Quod *Schooten* hæc non viderit mirandum non est homo parum literatus, ut ex Epistola ejus constat scripta ad *Wallisium*, qui eam edidit. *Hugenius* autem qui adhuc puer magnam in Mathematicis spem sui fecerat postea doctissimus sibi visus circa dimensionem circuli tempus contrivit inutiliter.

B. Videbunt tandem Canonum Sinuum, Tangentium, & Secantium admiratores Trigonometræ Tabulas illas non esse Geometricè demonstratas & numeros in illis conscriptos ab initio esse justo minores usq; ad Tangentem graduum 45.

A. Id quidem verum est. Sunt tamen illæ Tabulæ Trigonometris necessariæ; & in operibus parvis errores adeo sunt insensibiles ut videantur satis utiles esse, nec careri posse.

B. Rogo secundo.

A. Differ rogare paulisper, & lege Methodum adhuc aliam & breviorem.

METHO-

METHODUS III.

Prop. 42.

Superficies Conica Coni Isoscelis cujus latus est AO, Radius basis BV, æqualis est circulo descripto Radio BQ.

Est enim (in *Figura* prima) ut AO ad BO, ita AB ad BV, propterea quod triangula AOB, ABV sunt similia. Quare media proportionalis inter BO & AB est media quoq; inter extremas AO & BV, id est inter latus Coni & Radium Basis. Sed media inter BO & AB & proinde etiam inter AO & BV, est semidiagonalis BQ. Ergo (per *Prop.*15. libri primi *Archimedis* de Sphæra & Cylindro) descriptus circulus Radio BQ sive B*o* est æqualis superficiei Conicæ Coni cujus latus est AO, Radius basis BV. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Superficies Conica Coni cujus latus est AO, Radius basis BV, æqualis est dimidio circulo descripto Radio AB vel BC. Est enim circulus descriptus Radio BQ semissis circuli descripti Radio *AB*.

Prop. 43.

Arcus quadrantis descripti Radio BQ sive B*o* æqualis est rectæ AO (vide Figuram primam).

Quuoniam enim circulus descriptus Radio B*o* æqualis est Conicæ superficiei Coni recti cujus latus est AO, Radius basis BV sive B*h*, Conica hæc superficies, & circulus ille ad circulum *hi* completum rationem habebunt eandem. Ergo & quarta pars dictæ Conicæ superficiei & quadrans B*op*, ad quadrantem B*hi*, eandem habebunt rationem, id est rationem rationis B*o* ad B*h* sive ad BV duplicatam, id est rationem AO ad B*h*. Sumatur in latere AO Coni cujus semidiameter basis est B*h*, pars quædam æqualis BQ. Eritq; superficies totius Coni cujus latus est æquale AO ad superficiem suæ partis habentis latus æquale BQ, in duplicata ratione AO ad BQ id est in ratione AO ad B*h*. Quare & quarta pars superficiei Conicæ Coni cujus latus est æquale AO, est ad quartam partem superficiei Conicæ ejusdem, habentis latus BQ, in duplicata ratione AO ad BQ, id est in ratione AO ad B*h*. Jam quarta pars circuli descripti semidiametro BQ, & quarta pars superficiei Conicæ Coni cujus latus æquale est AO, semidiameter autem basis est B*h* sunt æquales; & utraq; æqualis dimidiæ areæ quadrantis BCA. Quare pars ejusdem Conicæ superficiei quæ habet pro latere BQ, æqualis est areæ quadrantis B*hi*, id est in ratione AO ad B*h*. Est ergo area quadrantis B*op*, ad aream quadrantis B*hi* in duplicata ratione AO ad BQ. Sed est in duplicata ratione arcus *op* ad arcum *hi*, id est in ratione duplicata B*o* ad B*h*, id est in ratione AO ad B*h*. Quare arcus *op* & recta AO

 sunt

ſunt inter ſe æquales, ut & arcus *hi* & recta BQ. Quod erat demonſtrandū.

Conſectarium. Recta *BF* quæ poteſt decem ſemiradios æqualis eſt arcui *BLD*. Eſt enim arcus *op* media proportionalis inter arcum *BLD* & ipſius ſemiſſem; quia recta BQ eſt media proportionalis inter Radium *BC* & ipſius ſemiſſem *BO*. Sed recta *nζ* ipſi arcui *op* eſt æqualis; & proinde ipſa *nζ* eſt media proportionalis inter arcum *BD*, & ipſius ſemiſſem. Sed *nζ* (cum poſſit quinq; ſemiradios) media eſt proportionalis inter rectam *BF* & ſemiſſem ejus nempe rectam *BX*. Itaq; *BF* eſt æqualis arcui *BLD* & recta *BX* æqualis arcui *BL*.

Prop. 44.

Recta *BS* (quæ poteſt 10 ſemiradios, ſive *BF* ſumpta ipſi *BS* æqualis) æqualis eſt arcui *BLD*. (Vide *Fig*.1.)

Cum enim BQ ſit media proportionalis inter *BC* radium, & *BO* ſemiradium, erit quoq; arcus quadrantis deſcripti Radio BQ media proportionalis inter arcum *BLD*, & arcum *MO* ipſius ſemiſſem. Ergo et recta *AO* (arcui quadrantis deſcripti Radio BQ æqualis) erit media proportionalis inter eundem arcum *BLD* totum, & arcum *MO* ejus dimidium. Sed recta *AO* (quia poteſt quinq, ſemiradios) eſt media proportionalis inter *BS* quæ poteſt 10 ſemiradios & ſemiſſem ejus *BX* quæ poteſt decem quartas Radii. Eſt ergo *BS* æqualis arcui *BLD*. Quod erat demonſtrandum.

Conſectarium. Arcus quadrantis. Radius. & $\frac{2}{5}$ arcus quadrantis ſunt continue proportionales. Nam B*b* eſt $\frac{2}{5}$ rectæ *BF*.

B. Argumentorum abundè eſt; neq; quid porro deſit ad perimetri circuli magnitudinem determinandam poſſum imaginari. Nam quæ ego te rogaturus eram, non ad hæc confirmanda, ſed ad minora quædam cognoſcenda ſpectant. Et video quidem rectas omnes (Figuræ ſecundæ) ductas ab X, & ſecantes AP, ſecare ipſam & arcum BL in eaſdem rationes. Nam AP eſt ſemiradius, & BL ſemiarcus, A*d* eſt $\frac{2}{5}$ Radii, & BS $\frac{2}{5}$ Arcus. Item XO abſcindit ab AD æqualem rectæ QR id eſt dimidiæ Z, ſed utrum recta XC abſcindat in arcu BLD arcum duplum ejus quem abſcindit XO, non video. Neq; video utrum juncta XK abſcinderet ab AD duas ejus tertias partes, ſed ſcire cupio.

A. Quamvis ſemiradius AP & ſemiarcus BL ſimiliter dividantur a rectis ductis ab X, non ſequitur tamen idem fieri oportere uſq; ad punctum D. Neq; poſſibile eſt. At rectæ ductæ ab X dividunt totum Radium AD & totam rectam BF (ipſi arcui BLD æqualem) in rationes eaſdem.

B. Id quidem manifeſtum eſt. Cur autem ſemiradium PD & arcum LD non ſimiliter dividunt?

A. Non habent duo arcus BL, LD ad latus BC ſitum ſimilem. Itaq; ſi

si velis dividere semiarcum LD sicut dividitur BL producendum est latus DA donec æqualis fiat ipsi BX, & ab eo termino oportet rectas ducere ad arcum DL, quæ secabant semiradium AM & DL arcum in easdem rationes.

B. Quoniam sæpius & a teipso audivi demonstrationem legitimam omnem procedere a causa Efficiente, scire cupio in his tuis demonstrationibus ubi apparet Causa Efficiens.

A. Quid? Ipsa ductio rectæ ita ut potentia ejus æqualis sit 10 semiradiis, nonne est efficere ut existat linea recta æqualis arcui quadrantis?

B. Est quidem; ego vero causam aliquam expectabam Physicam; nimirum,, motum puncti, vel naturam (non ante cognitam) curvitatis.

A. Nonne vides ut recta ducta *XS* & producta ad *BC* (in *Fig.* 2^da^) aufert secum & extendens arcum *BS* collocat terminum ejus *S* in recta BC. Utq; recta *XL* similiter extendit arcum *BL* & ponit in eadem *BC*. Eodem modo fit in omni parte arcus *BL*. Itaq; per extensionem istorum arcuum factam per motum rectum a puncto *X* invenietur recta æqualis parti quotæcunq; arcus *BL*. Atq; cum hoc rectè invenisset *Hobbius*, alieno postea magis quam suo ingenio fisus, repudiavit; quanquam ad demonstrationem ejus infirmandam nihil afferre potuerunt adversarii ejus præter numeros Ludolphinos, quos tandem vides esse falsos. Idem in libro *de Corpore Anglicè* edito, Problema idem solvit per naturam Curvitatis; Et demonstratio clara est & facilis, quam ibi, si liber, legas. Interea sume rectam æqualem chordæ quartæ tantum partis arcus AE, & illam quadruplica. Statim videbis rectam illam conflatam ex 4 chordis quartæ partis arcus BE, quæ multo minor est quam arcus ipse AE, vix tamen sensibiliter differre a dimidia BS. Adeo ut minorem forte putes BF quam arcus BLD, nunquam majorem. An Paralogismis aliorum tantum tribuendum est (etiam ubi differentiæ sunt valde sensibiles) ut nostris ipsorum sensibus credendum non sit? Sed mihi consideranti valde paucos esse Geometras qui scribentem de motu possint assequi, aut qui naturam curvitatis perscrutati sunt, & (quod nosti) argumenta a motu (in certamine de Cycloide prohibita esse) Visum est non aliis uti Principiis quam *Euclidis* & receptis.

Prop. 45.

Si a puncto X ducatur recta Secans arcum *BL* inter *B* & *L* illa producta ad rectam *BF* abscindet partem ipsius *BF* a puncto *B* mensurandam, æqualem arcui abscisso mensurando item a puncto *B*. (Vide *Fig.* 2^m^.)

Sit

Sit arcus $B\gamma$ minor arcu BL. Dico ductam $X\gamma$, & productam donec incurrat in rectam BF ad β, partem ejus abscindere a termino B æqualem arcui $B\gamma$. Secetur arcus $B\gamma$ bifariam in ϵ, & ducatur $\zeta\epsilon$ Sinus rectus arcus $B\epsilon$. Ducatur quoq; $\delta\gamma$ Sinus rectus totius arcus $B\gamma$, seceturq; bifariam in θ. Præterea producatur $\zeta\epsilon$ in η, ita ut $\zeta\eta$ sit dupla $\zeta\epsilon$, id est æqualis chordæ totius arcus $B\gamma$; est ergo $\zeta\eta$ duplus Sinus arcus $B\epsilon$, & proinde per ea quæ demonstrata sunt (*Prop.* 37. recta $X\theta$ producta secabit $\zeta\eta$ bifariam.) Eadem Methodo ostendi potest quod perpetuo bisecando ita contingit. Itaq; perpetua bisectione devenietur ad arcum minimum cujus Sinus haberi possit pro ipso puncto B; & propterea recta $B C$ æqualis erit omnibus simul Sinubus vel etiam chordis arcus minimi, id est ipsius B, & propterea æqualis ipsi arcui $B\gamma$. Quare si a puncto X ducatur recta Secans arcum BL inter B & L, illa producta abscindet partem ipsius BF mensurandam a puncto B æqualem arcui abscisso mensurando item a puncto B. Quod erat demonstrandum.

Prop. 46.

Datum arcum quemlibet $B\gamma$ dividere in ratione data. *Fig.* 2ª.

Jungatur $X\gamma$ & producatur ad BC in β, sitq; ratio data $B\beta$ ad $B\iota$. Deinde ducatur $X\iota$ secans arcum $B\gamma$ in S. Quoniam igitur (per præcedentem) arcus $B\gamma$ est æqualis rectæ BC, & arcus BS rectæ $B\iota$; erit ut arcus $B\gamma$ ad rectam BC ita arcus BS ad rectam $B\iota$. Secatur ergo datus arcus $B\gamma$ in S in ratione data rectæ BC ad rectam $B\iota$. Sed si quantitates Rationis datæ vel alterutra earum major sit quam semissis arcus BLD, sumendæ sunt in eadem ratione minores, exempli gratia, ipsarum semisses, & operatio instituenda ut prius. Divisimus ergo datum arcum in ratione data. Quod erat faciendam.

Quid ad hæc dicent illi convitiatores *Hobbii?*

B. Nescio. Sed etiamsi neq; demonstrata neq; vera hæc essent morem tamen illum maledicendi illis qui aliter atq; ipsi sentiunt non excuso; præsertim ex animi sententia scribentibus, nec studio partium veritatem oppugnantibus. Quando vero libros doctorum (ut habentur) hominum, maxime vero Theologorum, maledictis, dicteriisq; (frigidis) refertos sæpe videam, admirari soleo quo læsi, Unde tantæ iræ, & cui bono erumpunt.

A. Læsi sunt, eo quod existimatio eruditionis suæ, quæ illis omnia est, læsa est. Sed ut iram conviciis manifestam faciant, causa nulla esse potest præter ingenium illiberale. Convitium enim est indictio quædam belli, sive provocatio ad pugnam, quam Leges prohibent. Vident ergo posse, se impune maledicere silentio legum abutentes, ut mos

est

est mulierculrum, aut virorum imbellium. Credin' tu authores Librorum quos modò dicebas plenos esse conviciorum, ad pugnam aptissimos esse ?

B. Minime omnium. χέσαιντο γάρ εἰ μαχέσαιντο.

Prop. 47. *Describendæ Cycloidis* METHODUS.

Sit Semicirculus BCD cujus Centrum A. Supponaturq; punctum B moveri uniformiter in Arcu BCD, (qui sit divisus bifariam in C) & eodem tempore moveri eadem velocitate in recta AC. Sunt autem anguli ad A recti. Et (quia motus rectus Centri A æqualis est motui Circulari per Arcum BCD) quando punctum B est in D erit descripta a Centro A recta (transiens per C) æqualis ipsi Arcui BCD.

Sit ea recta AE, cui æquales ponantur DF, BG, nempe quæ possit decem (semiradios) AB ; erit ergo AE sive DF æqualis arcui BCD. Compleatur rectangulum BDFG.

Jam ad descriptionem Cycloidis dividatur tum Arcus BCD, tum recta BG in partes æquales quotlibet. Ego utramq; lineam secui in partes 12 ; nempe Arcum ad puncta 1.2.3.4.5. C. 7.8.9.10.11.12.D; & rectam BG in totidem partes ad puncta α.β.γ.δ.ε.ζ.η.θ.ι.κ.λ. Et per illa puncta duxi totidem rectas diametro DB parallelas. Item per singula puncta divisionis Arcus BCD, singulas rectas lateri BG parallelas ; quas appello *parallelas altitudinis*, ut quæ designant partium circumferentiæ BCD altitudines. Quibus constructis erit Arcus B 1 (pars Arcus BCD) æqualis B α parti ipsius rectæ BG, & tota BG toti Arcui BCD æqualis.

In recta AE notentur divisiones eædem quæ sunt in recta BG, nempe 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11. E. Et Radio 1 α ducatur Arcus α *a* secans parallelam altitudinis primam in *a*. Quando ergo punctum B deberet esse (propter motum circularem) in arcu suo ad punctum 1, erit (propter motum rectum Centri) in puncto *a*. Motus enim Centri non variat altitudines circulatione acquisitas, quæ semper sunt in altitudinum parallelis. Deinde radio 2 β ducatur arcus Circuli Secans parallelam altitudinis secundam in *b*. Quando ergo punctum B propter motum circularem deberet esse in suo arcu ad 2 erit propter motum rectum Centri in eadem parallela altitudinis ab *b* ; eritq; arcus α *a* æqualis arcui B 1, & arcus β *b* æqualis arcui B 2. Item si Radio 3γ describatur arcus γ *c* secans tertiam altitudinis parallelam in *c* erit arcus γ *c* tripla arcus B 1. Eadem Methodo constituuntur reliqua puncta *d.e.f.g.h.i.k.l.* per quæ puncta Cyclois debet transire, quæ est descriptio Cycloidis.

Con-

Consectarium primum. Manifestum hinc est Arcus omnes αa. βb, γc usq; ad Arcum semicirculi GF esse in ratione continua Arithmetica.

Consectarium secundum. Manifestum quoq; est si plures fierent divisiones accuratiorem fore Cycloidem, ratione Arithmetica semper servata, & deniq; si arcus ducerentur eadem Methodo, tot quot duci possibile est, impleretur spatium planum comprehensum duabus lineis curvis (nempe Arcu semicirculi GF & linea Cycloide F*d*B) & deniq; recta BG.

Prop. 48.

Spatium trilineum inclusum Cycloide & duabus rectis BG, GF, æquale est semicirculo ABCD.

Nam Arcus GHF, λl κk, ιi, θh, & cæteri secundum rationem Arithmeticam perpetuo decrescentes æquales sunt totidem Arcubus semicirculorum integris, descriptis a Radiis quorum maximus quidem esset EG, cæteri vero minores decrescentes scilicet secundum eandem rationem Arithmeticam, donec evanescerent in puncto E. Sed Arcus hi constituerent semicirculum, (modo Radius EG partes aliquotas divisus esset in quot partes divici illum est possibile) constituerent, inquam, semicirculum EGHF. Quare compositæ lineæ BGHF, Bλl, Bκk, Bιi, Bθh, Bηg, Bζf, & cæteri omnes eadem Methodo describtibiles qui dupli sunt arcuum GHF, λl, κk, ιi, *&c.* cuncti constituent spatium duplum semicirculi EGHF. Sed spatium inclusum Cycloide, & arcu GHF, & recta BG est ipsum spatium quod constituitur a lineis illis compositis BGHF, Bλl,*&c.* Est ergo spatium inclusum Cycloide, & Arcu GHF, & recta BG, duplum semicirculi EGHF. Reliquum ergo Spatium inclusum Cycloide, & duabus rectis BG, FG æquale est semicirculo. Quod erat demonstrandum.

Consectarium primum. Sequitur hinc Spatium comprehensum Cycloide & duabus rectis DF, DB triplum esse semicirculi genitoris. Nam rectangulum totum quod fit a semiperimetro (id est a DF) in diametrum BD est semicirculi quadruplum.

Consect. 2. Manifestum quoq; est Spatium duabus curvis, nimirum Cycloide & Arcu BCD & recta DF inclusum duplum esse semicirculi genitoris ABCD. Est enim semicirculus ABCD unum quorum trilineum inclusum Cycloide & rectis DF, DB, est tria.

Consect. 3. Sequitur etiam rectam quamlibet parallelam basi DF & interceptam a Cycloide & Arcu BCD, æqualem esse Arcui sibi contiguo sumpto a contactu ad punctum B. Tota enim recta DF æqualis est toti Arcui DCB, per Hypothesin. Quoniam ergo spatium trilineum comprehensum Cycloide, Arcu BCD, & recta FD, duplum est

est semicirculi ABCD, & recta FD dupla est fc erunt singulæ rectæ singulis Arcubus (propterea quod similiter generantur) æquales, id est recta l 11 æqualis Arcui B11, recta k 10 æqualis arcui B10, & sic de cæteris.

Consectarium hoc tertium etiam sic demonstratur seorsim.

Sumpto quolibet Arcu B3 cujus Sinus productus sit ad Cycloidem in c, & pars intercepta sit 3c. Quoniam ergo (per constructionem quo tempore per motum circularem punctum B deberet esse in 3, eodem tempore per motum rectum debet descripsisse rectam arcui B3 æqualem, erit recta Bc ipsi arcui B3 æqualis. Itaq; si vera sit Cyclois, non modo basi ejus DF æqualis erit arcui BCD, sed etiam omnis alia recta inter arcum BCD & Cycloidem intercepta basiq; parallela erit arcui sibi contiguo terminato in B æqualis.

Quod si motus Centri rectus motui circulari per arcum BCD sit inæqualis, erunt parallelæ interceptæ Arcubus suis contiguis proportionales quidem, sed inæquales; & per consequens non erit ea vera Cyclois quam definivimus.

Prop. 49.

Recta *DG* dividit bifariam tum triangulum rectilineum BGF, tum partes ejus nempe spatium Cycloidale externum BGF & bilineum BFB.

Secet recta *DG* Cycloidem in *m*. Eritq; triangulum rectilineum *G6F* æquale quartæ parti rectanguli *BDFG*, id est semicirculo genitori; & tria spatia nempe triangulum *G6F*, spatium Cycloidale externum *BFG*, & bilineum *BFB* inter se æqualia. Rursus triangulo rectilineo G 6 F æquale est triangulum rectilineum G 6 B. Dividitur ergo totum triangulum BGF a recta DG bifariam. Pars ergo Cycloidalis spatii comprehensa parte Cycloidis F*m* & duabus rectis FG, G*m*, una cum parte bilinei B*f*B comprehensa ab eadem parte Cycloidis F*m*, & duabus rectis *F6*, 6*m* æquale est duobus spatiis, nempe Cycloidali BG*m* & parti bilinei B*m*6B. Cum autem triangulum rectilineum G6F æquale sit spatio Cycloidali BFG, ablato communi spatio G*m*B restabit spatium B*m*6B (pars bilinei BFB) æquale spatio FG*m* parti Cycloidalis spatii externi reliquæ. Quare spatium Cycloidale ablatum, nempe *BGm* æquale est parti reliquæ bilinei F*6m*. Si ostendero jam spatium Cycloidale FG*m* æquale esse spatio F*6m* parti bilinei BFB, necesse est ut quatuor illa spatia sint inter se æqualia. Dividatur recta G6 bifariam, id est, in *s*, ducaturq; recta F*s* secans Cycloidem in *n*; eritq; triangulum rectilineum GF*s* æquale triangulo *s*F*6*. Superat autem triangulum GF*s* spatium Cycloidale FG*m* spatio trilineo *s n m*, minus spatio bilineo

 F*n*F.

FnF. Sed triangulum $sF6$ (triangulo GFs æquale) superat spatium $F6m$ (partem bilinei BFB) eodem spatio trilineo snm, minus spatio bilineo FnF. Sunt ergo partes trianguli G6F diremptæ a parte Cycloidis Fm, inter se æquales. Itaq; recta DG secat tum rectangulum totum BGF tum partes ejus, &c. bifariam. Quod erat demonstrandum.

Prop. 50.

Partes duæ Cycloidalis spatii *BFG*, ut & partes bilinei *BFB* diremptæ a recta *DG* æquiponderant super ipsam *DG*.

A puncto *B* ducatur recta B*o* secans rectam *DG* in ipso Arcu *BCD*. Eritq; B*o* ad *DG* (propter Arcum semicirculi *BCD*) perpendicularis; distantia ergo puncti *B*, a recta *DG* est recta B*o*. Item Centro *E* radio *EG* descripto arcu secante *DG* in *p* recta F*p* erit distantia puncti *F* a recta *DG*; & sunt rectæ B*o*, F*p* inter se æquales. Cum ergo spatia FG*m* & *m*GB ostensa sint æqualia, & æqualiter distent a recta *DG*, quæ dividit illa bifariam, etiam super ipsam *DG* æqui ponderabunt. De partibus bilinei nempe *F6m*, *B6m* eadem est demonstratio. Quare partes, &c. Quod erat demonstrandum.

Per eandem causam demonstrari potest quod Centrum gravitatis etiam spatii Cycloidalis interni *BFD*, terminati Cycloide ipsa & duabus rectis *BD*, *DF* est in eadem diagonali *DG*.

Prop. 51.

Centrum gravitatis spatii Cycloidalis externi *BGF*, est in *s*.

Juncta enim *FA* & divisa in I, ita ut *FI* sit ad *IA* ut 2 ad 1 erit punctum I Centrum gravitatis trianguli rectilinei *BFD*, quod quidem triangulum rectilineum *BFE* duplum est spatii bilinei *BFB*. Est autem punctum I in concursu rectarum $\delta\delta$ & *DG*. Itaq; si Centrum libræ statuatur in *L*, ubi I6 dividitur bifariam, erit Centrum gravitatis bilinei *BFB* in *K* ubi *6M* dividitur bifariam. Est enim triangulum *BFD*, duplum bilinei *BFB*. Rursus juncta *BE* erit divisa in *M*, ita ut *BM* sit ad *ME* ut 2 ad 1, nempe in concursu rectarum *DG* & $\theta\theta$. Erit ergo *M* Centrum Gravitatis trianguli *BFG*. Cum ergo Centrum gravitatis bilinei *BFB* sit in *K* erit Centrum gravitatis spatii Cycloidalis externi *BGF* in *s*, ita ut M*s*, *MK* sint æquales. Et propterea punctum *s* est in concursu parallelæ $\iota\iota$ & *DG*. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Centrum gravitatis spatii interni Cycloidalis *BFD*, est in puncto *L*, ubi diagonalis *DG*, ita dividitur ut *GL* sit ad *LD* ut

7 ad

7 ad 5. Cum enim ſpatium Cycloidale internum *BFD*, triplum ſit ſpatii Cycloidalis externi *BGF*, ſi centrum libræ ſtatuatur in puncto 6. erit 6*s* triplum diſtantiæ centri gravitatis ſpatii Cycloidalis interni ab eodem puncto 6. Sed 6*s* eſt triplum 6*L*. Eſt ergo Centrum gravitatis ſpatii Cycloidalis interni *BFD* in *L*. Dividitur autem recta *DG* ita ut *GL* ſit ad *LD* ut 7 ad 5, cum ſit *L* in concurſu *ss* & *DG*.

Prop. 52.

Quadrilineum *m6 CB* comprehenſum duabus curvis B*m*, *BC*, & duabus rectis 6*m*, 6*C* æqualis eſt quadranti *ABC*.

Secet enim recta 6*B* Arcum *BC* in *q*. Quoniam ergo triangulum rectilineum *AB6* eſt pars octava rectanguli *BDFG* erit idem æquale quadranti *ABC*, Ablato ergo ſpatio communi *ABqC* erit reliquum ſpatium 6*qC* æquale bilineo *BqB*. Sed ſpatium 6*m BC* comprehenſum a parte Cycloidis *Bm* & duabus rectis *m*6, 6*C* oſtenſum eſt æquale quadranti *ABC*. Itaq; ſi ipſi addatur ſpatium 6*qC*, & eidem auferatur bilineum *BqB*, erit factum ſpatium *m*6*CB* (comprehenſum duabus curvis *Bm*, *BC* & duabus rectis *m*6, 6*C*) æquale (ut antè) quadranti *ABC*. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 53.

Spatium Cycloidale internum *BAf* comprehenſum a parte Cycloidis *Bf*, & duabus rectis *AB*, *Af* ſuperat ſemicirculum genitorem tantum, quantum eſt trilineum 6*fm*.

Nam (per præcedentem) ſpatium quadrilineum *BC6m* æquale eſt quadranti *ABC*. Quare quadrilineum *ABm6* æquale eſt ſemicirculo genitori, cui ſi addatur trilineum *m6f* fit ſpatium Cycloidale integrum *BAf*. Spatium ergo Cycloidale *BAf*, &c. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 54.

Si ducatur recta *DC* & producatur ad *BG* in *N*, juncta *FN* tranſibit per punctum *f*.

Cum enim *DN* tranſeat per *C* erit *BN* æqualis diametro *BD*, & quoniam *BG* eſt æqualis Arcui ſemicirculi Genitoris, erit *GN* exceſſus quo Arcus *BCD* ſuperat diametrum *BN*. Eſt autem 6*E* ſemiſſis ipſius *BG*, & 6*f* ſemiſſis diametri ſive rectæ *BN*. Quare recta *Ef* eſt ſemiſſis rectæ *GN*. Etiam *FE* eſt ſemiſſis *FG*. Ut ergo *FG* ad *GN*, ita *FE* ad *Ef*. Tranſit ergo *FN* per punctum *f*. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 55.

Triangulum rectilineum EF*f* æquale eſt ſpatio intercepto inter arcum quadrantis ABC & ejuſdem ſubtenſam.

Triangulum *6EF* æquale eſt quadranti *ABC*. Et quoniam *6f* æqualis eſt ſemidiametro, erit Triangulum F*f6*, æquale dimidio quadrato ab *f6*. Reliquum igitur triangulum rectilineum *FEf*, æquale eſt reliquo ſpatio, nimirum, ſpatio quod relinquitur, dempto a quadrante *ABC* triangulo rectilineo *ABC*, id eſt ſpatio incluſo intra Arcum *BC* & ſubtenſam ejus. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 56.

Si ducta B*ʋ* producatur ad baſim Cycloidis *BF* in *u*, erit recta D*u* duæ quintæ ipſius *DF*, ſive ipſius arcus *BCD*.

Oſtenſum enim eſt in præcedentibus arcum quadrantis, cujus Radius eſt æqualis rectæ *BD*, æqualem eſſe rectæ quæ poteſt decem ſemiradios (id eſt quæ poteſt decem radios ſemicirculi genitoris.) Eſt autem *DF* (per conſtructionem) æqualis arcui *BCD*. Quoniam autem angulus B*ʋ*D in ſemicirculo eſt rectus, & quatuor rectæ *6*G, *6*B, *6*D, *6*F, ſunt æquales, item quatuor anguli BD*ʋ*, GB*ʋ*, *6*DB, *6*FD inter ſe æquales; erunt triangula GDB, BD*ʋ*, D*uʋ* ſimilia. Eſt ergo ut BG (id eſt arcus BCD) ad DB diametrum, ita BD diameter ad D*u*. Eſt ergo D*u* æqualis rectæ quam appellavimus Z, ſive duabus quintis rectæ quæ poteſt decem ſemiradios, id eſt rectæ BF, id eſt arcus BLD. Quod erat demonſtrandum.

Prop. 57.

Centrum gravitatis bilinei contenti linea Cycloidale B*f*F, & recta BF, eſt in eo puncto diagonalis DG, quod ipſam ita dividit in K, ut DK ſit ad KG ut 7 ad 5.

Eſt enim triangulum *AFD* quarta pars rectanguli DG, id eſt æqualis ſemicirculo genitori. Et triangulum BFD æquale duplo ſemicirculo genitori. Quoniam autem centrum gravitatis trianguli AFD eſt in recta DG ad I (nam FA eſt ad IA ut 2 ad 1; & oſtenſum eſt centrum gravitatis figuræ Cycloidalis comprehenſæ Cycloide B*f*F & duabus rectis BD, DF eſſe in puncto L, & bilineum BFB æquale eſſe ſemicirculo genitori) erit bilineum BFB unum, quorum triangulum rectilineum BFD, vel etiam BFG eſt duo. Quoniam ergo centrum gravitatis figuræ B*f*FD, quod eſt tria, eſt in L, erunt IL, LK inter ſe in ratione reciproca magnitudinum KL & LI. Si ergo punctum L ſtatuatur centrum libræ, triangulum BFD & bilineum BFB ſuſpenſa in I & K æquiponderabunt. Eſt ergo K centrum gravitatis bilinei BFB. Quod erat demonſtrandum.

Prop

Prop. 58.

Planum inclusum intra Arcum quadrantis & subtensam ejusdem arcus, est ad trilineum conclusum ab eodem arcu quadrantis & duos radios in angulo recto concurrentes, ut sexta pars semiperimetri circuli genitoris unâ cum tertia parte excessus ipsius semiperimetri supra tres radios ejusdem circuli, ad dictam sextam partem semiperimetri mulctatam duabus tertiis prædicti excessus circuli genitoris supra tres Radios.

Centro E, Radio EG vel EF describatur semicirculus GRF secans EA in R. Eritq; $R8$ æqualis $C4$ vel $1of$, id est tertiæ parti excessus rectæ AE, sive arcus GRF supra tres radios sive triplam AC.

Nam ostensum est (*Prop.* 55.) quod triangulum rectilineum FEf æquale est plano incluso intra arcum quadrantis & ipsius subtensam, id est bilineo RFR. Ducatur RS perpendicularis ad FD in S. Jam duplum planum RFR unâ cum trilineo incluso intra FS, SR & arcum FR constituunt planum quadrantis ERF. Quoniam igitur triangulum rectilineum EFf & bilineum RFR sunt duplum bilineum RFR, erit triangulum rectilineum reliquum FfR æquale trilineo FSR incluso intra radios FS, SR & arcum quadrantis FR. Est ergo bilineum RFR ad trilineum FSR, ut Ef ad fR; id est ut sexta pars semiperimetri circuli genitoris unâ cum tertia parte excessus ipsius semiperimetri supra tres Radios ejusdem circuli, ad dictam sextam partem semiperimetri mulctatam duabus tertiis prædicti excessus semiperimetri circuli genitoris supra tres Radios. Quod erat demonstrandum.

Consectarium 1. Rectangulum sub SR, Rf æquale est duplo trilineo FSR; & rectangulum sub FE, Ef æquale duplo bilineo RFR; propterea quod æqualia sunt alterum duplo triangulo FfR, alterum duplo triangulo FEf.

Consect. 2. Rectangulum sub SR & dupla $R8$ est æquale excessui quo segmentum RFR superat trilineum conclusum rectis FS, SR & Arcu quadrantis FR, (quod trilineum est complementum quadrantis ad quadratum Radii) nam rectangulum FEf superat rectangulum SRf duplo rectangulo SR in 8R. Quare triangulum FEf superat triangulum SRf ipso rectangulo SR in 8R.

Prop. 59.

Trilineum $6fm$ clausum duabus rectis $6m$, $6f$, & parte Cycloidis fm, æquale est trilineo FEf clauso duabus rectis FE, Ef & parte Cycloidis Ff.

Est

Est enim planum clausum parte Cycloidis *Ffm* & duabus rectis *F6*, *6m*, æquale quadranti *ERS* (per *Prop*.49.) Ablato ergo communi spatio trilineo F*f*, *RF* clauso duabus curvis, nempe arcu *FR*, & parte Cycloidis F*f* & recta *f*R, restabunt ex altera parte trilineum *FEf*, ex altera parte *6mf* inter se æqualia. Quod erat demonstrandum.

Prop. 60.

Trilineum *6fm* æquale est complemento quadrantis *ERF* ad quadratum Radii *ER*.

Sunt enim triangula rectilinea *FEf*, *FR6* æqualia, propter altitudinum inter se, & basium inter se æqualitatem. Quare utrumq; eorum æquale est bilineo *RFR*. Est autem tam triangulum rectilineum *6EF*, quam trilineum *6fm* æquale quadranti *ERF*, & proinde æqualia inter se. Itaq; si auferatur commune triangulum rectilineum F*f*R, restabunt ab una quidem parte duo triangula FE*f*, *FR6*, quæ sunt inter se æqualia, & ambo simul æqualia duplo bilineo *RFR*; ab altera vero parte duo trilinea nempe triangulum rectilineum F*f*R, & trilineum *6fm*, quæ ambo simul æqualia sunt duplo complemento quadrantis *ERF* ad quadratum Radii *ER*. Sed cum duo triangula FE*f*, *FR6* æqualia sint duplo bilineo *RFR*, erit triangulum F*f*R æquale uno complementorum prædictorum (est enim quadrans æqualis duplo bilineo *RFR* una cum complemento ipsius quadrantis ad quadratum Radii.) Quare trilineum *6fm* æquale est altero complementorum. Trilineum ergo *6fm*, *&c.* Quod erat demonstrandum.

Prop. 61.

Spatium Cycloidale AB*f* terminatum duabus rectis AB, A*f* & curva B*cmf* æquale est quadranti ABC una cum quadrato ABzC.

Ostensum enim est (*Prop*. 52.) quod quadrilineum *m6*CB terminatum duabus rectis *m6*, 6C, & duabus curvis, arcu BC, & curva B*cm*, est æquale quadranti *ABC*. Cui additum spatium *6fm* æquale (ut in præcedente ostensum est) complemento quadrantis *ABC* ad quadratum ABzC facit planum comprehensum a duabus curvis B*mf* & arcu *BC*, & a recta *f*C, æquale quadrato ABzC. Cui si addatur rursus ipse quadrans *ABC*, fit totum planum terminatum duabus rectis *AB*,A*f*, & curva B*mf* æquale utriq; simul, quadranti *ABC* & quadrato ABzC. Quod erat demonstrandum.

B. Cum Rectangulum *f*πzC duplum sit quadrantis *ABC*, & rectæ parallelæ quæ complent trilineum *f*BC*f* crescant a puncto B secundum progressionem Arithmeticam usq; ad C*f* æqualem arcui *BC*,

ego

Ego credidissem, juxta doctrinam *Wallisii* in sua Arithmetica Infinitorum, spatium planum $fBCf$ æquale esse dimidio Rectangulo $f\pi zC$, id est quadranti ABC.

A. Vides ergo regulæ *Wallisianæ* falsitatem, & quod extra figuras rectangulas & earum partes nihil valet.

Consectarium 1. Si ducatur recta Bf erit factum spatium bilineum BfB, æquale dimidio quadrato ABzC. Ducta enim recta $f\pi$ perpendiculari ad BG in π, & juncta fz, erit rectangulum fz (contentum sub fC quæ æqualis est arcui ABC & sub Radio $f\pi$) æquale duplo quadranti ABC; & proinde totum rectangulum Bf æquale duplo quadranti una cum quadrato ABzC. Et triangulum rectilineum ABf æquale uni quadranti ABC una cum dimidio quadrati ABzC. Quare quod restat bilineum BfB æquale est alteri dimidio quadrati ABzC.

Consect. 2. Recta fz ita secat Cycloidem, puta in c, ut bilineum cfc & trilineum czB sint inter se æqualia; quod ex eo manifestum est quod spatium Cycloidale $fABmf$, & quadrilaterum rectilineum $ABfz$ sunt inter se æqualia.

Consect. 3. Triangulum rectilineum fzB æquale est bilineo fBf. Est enim triangulum fCz (cujus latus fC æquale est arcui BC, & latus Cz æquale Radio AC) æquale quadranti ABC. Quoniam autem triangulum fzB una cum quadrato ABzC æquale est spatio Cycloidali fBA, ablato communi triangulo rectilineo fAB erit reliquum triangulum fzB æquale reliquo bilineo fBf, id est dimidio quadrato ABzC.

Prop. 62.

Solidum descriptum a plano Cycloidali $BfFDB$ moto super basem DF per quadrantem circuli est æquale duabus tertiis Solidi quod fit a rectangulo DG moto item super eandem basem, & per quadrantem circuli.

Intelligatur rectangulum DG moveri super basem DF immotam, donec rectæ DB, FG, cæteræq; intermediæ parallelæ descripserint singulæ suos quadrantes; quo facto, dictum rectangulum DG insistet plano chartæ perpendiculariter in communi sectione DF; eritq; descripta quarta pars Cylindri recti. Erit autem arcus quadrantis descripti ab una quaq; parallelarum dictarum, æqualis arcui BCD, & quotalibet pars ejus æqualis parti cognomini arcus BC. Præterea Sinus rectus quotælibet partis arcus quadrantis descripti a DB, æqualis erit chordæ arcus cognominis descripti ab AB. Ubi enim arcus quadrantis arcui semicirculi est æqualis, si sumantur in utroq; eædem partes, quæ recta chorda est arcus sumpti in semicirculo, eadem recta erit Sinus rectus arcus analogi in quadrante. Itaq; si ducatur recta parallela & æqualis

rectæ DB, terminata in DF & BG secans Cycloidem in 1, parte duodecima arcus BCD, erit chorda B1 æqualis Sinui recto partis duodecimæ arcus quadrantis descripti Radio qui sit æqualis rectæ DB. Quare si in arcu quadrantis descripti a parallela per 1, sumatur pars ejus duodecima, & demittatur inde in Chartæ planum recta perpendicularis, incidet illa in parallelam altitudinis quæ transit per 1.

Similiter ostendi potest quod si sumatur pars sexta, id est arcus B2, Sinus rectus duarum duodecimarum partium arcus quadrantis descripti a parallela per *a*, ea incidet perpendiculariter in parallelam altitudinis quæ transit per 2. Et sic de cæteris partibus quadrantis. Itaq; arcus quadrantum descriptorum a rectis parallelis ipsi DB, decrescunt in ratione Arithmetica, donec evanescant in puncto *F*. Plana autem quadrantum eorundem decrescunt in ratione arcuum duplicata. Quare aggregatum quadrantum omnium descriptorum a dictis parallelis sumptis usq; ad Cycloidem, id est Solidum descriptum a plano Cycloidali BfFDB est ad Solidum descriptum a conversione spatii Cycloidalis externi BGFfB. Et ad Solidum descriptum a rectangulo DG ut 2 ad 3. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Sequitur hinc quod solidum descriptum a triangulo *FBD*, solidum descriptum a bilineo BFB, & solidum descriptum a plano Cycloidali externo BGFfB esse inter se æqualia; & unum quodlibet eorum æquale quartæ parti Coni, ejusdem altitudinis & basis cum Cylindro descripto a rectangulo *DG*. Est enim Conus, id est solidum descriptum a triangulo rectilineo *DGF* converso super rectum *DF*, tertia pars Cylindri descripti a revolutione rectanguli *DG* super eandem rectam *DF*.

Consect. 2. Manifestum hinc est eadem Methodo demonstrari posse, sumptâ quavis aliâ parallela altitudinis, ut A*f*, terminatâ ex una parte in diametro *DB*, ex altera parte in Cycloide, & ductâ $f\pi$ perpendiculariter ad *BG*, Quod solidum factum a conversione plani Cycloidalis B*mf*A circa rectam A*f* per quadrantem circuli æquale esse duabus tertiis solidi facti eodem tempore a conversione rectanguli $A\pi$ supra eandem A*f*.

Prop. 63.

Centrum gravitatis semicirculi genitoris *ABCD* ita dividit Radium *AC* in *O*, ut pars *AO* sit $\frac{2}{3}$ arcus *BCD*.

Si fiat ut tertia pars arcus *BCD* ad tertiam partem subtensæ (id est diametri) *BD*, ita duæ tertiæ Radii *AB*, id est una tertia diametri *BD*, ad quartam, erit terminus illius quartæ sumptæ ab *A* versus *C* centrum gravitatis semicirculi *ABCD*. (per lib. primum *cap.* 9 *Prop.* 1.

Prop. 1. *Guldini* de *Centro gravitatis*.) Sit terminus ille O.

Est ergo tertia pars diametri *BD* media proportionalis inter tertiam partem arcus *BCD* & *AO*. Quoniam ergo diameter (per superius demonstrata) est media proportionalis inter arcum *BCD* & duas quintas arcus ejusdem, etiam tertia pars diametri erit media proportionalis inter tertiam partem arcus *BCD* & tertiam partem duarum quintarum sive sex quindecimarum dicti arcus *BCD*. Sed tertia pars sex quindecimarum est $\frac{2}{15}$, quare *AO* est $\frac{2}{15}$ arcus *BCD* sive rectæ *AE* vel *DF*. Itaq; centrum gravitatis semicirculi genitoris *ABCD*, ita dividit radium *AC* in *O*, ut pars *AO* sit $\frac{2}{15}$ arcus *BCD*. Quod erat demonstrandum.

Coroll. Ducta ab *O* recta *Ov* parallela diametro *BD* secans rectam Az, in *v*, erit punctum *v* centrum gravitatis quadrantis *ABC*.

Aliter.

Si fiat ut arcus *BC* ad duas tertias subtensæ *BC*, ita *Aξ* semisubtensa ad quartam sumendam ab *A* versus *C*, erit terminus ejus centrum gravitatis semicirculi. Demonstratum est a *Jo. de la Faille*, *Prop.* 36. Sed ut arcus *BC* ad subtensam *BC* ita subtensa *BC* ad $\frac{2}{5}$ arcus *BC*, id est ad unam quintam totius *BCD*. Quare ut arcus *BC* ad $\frac{2}{3}$ subtensæ *BC* ita *Aξ* id est semisubtensa ad duas tertias duarum quintarum arcus *BC*, id est ad unam tertiam duarum quintarum totius arcus *BCD*, id est ad $\frac{2}{15}$ arcûs *BCD*. Quod erat demonstrandum.

B. Si fiat semicirculus æneus accuratus qui sit ejusdem ubiq; crassitudinis, isq; in puncto *O* tenui filo suspensus maneat plano Horizontis parallelus, quin recta *DF* æqualis sit arcui semicirculi genitoris, dubitari amplius non potest.

A. Etsi experimenta talia vim non habeant demonstrationis, juvat tamen operis cum contemplatione consensio. Itaq: semicirculum æneum fieri curavi, & suspendi ab eo puncto, & parallelismum Horizontalem inveni exactissimum; sed procede.

Prop. 64.

Invenire centrum gravitatis segmenti *BCB* contentum arcu quadrantis & subtensa arcus *BC*.

Invento centro gravitatis trianguli rectilinei *ABC* fiat ut segmentum *BCB* ad triangulum *ABC*, ita distantia inter centra gravitatis quadrantis *ABC* & trianguli *ABC* ad aliam. Et illa inventa pona-

tur a puncto v versus arcum in eadem recta A z, nempe vr, & erit r centrum quæsitum. Datur autem ratio bilinei *BCB* ad triangulum *ABC*, nempe ratio *FR* ad *FE*, & est centrum gravitatis segmenti *BCB* in recta A z in qua sunt centra gravitatis tum Trianguli tum quadrantis *ABC*. Datur ergo punctum r, id est centrum gravitatis segmenti *BCD*. Factum ergo est, quod erat faciendum.

B. Video etiam aliud sequi scitu non indignum, nimirum, Planum quod nascitur ab aggregatione rectarum, quæ æquales sunt partibus arcus BC perpetuo a nihilo crescentibus juxta rationem Arithmeticam, quando applicantur ordinatim ad terminos curvarum sibi æqualium nempe B1 B2 B3, *&c.* æquales esse plano quod nascitur ab aggregatione sinuum rectorum eorundem arcuum, quando illi sinus ordinantur singuli ad terminos arcuum suorum in rectâ quæ sit ipsi arcui BC æqualis. Nam quod aggregatum sinuum rectorum omnium ita ordinatorum æquale est quadrato Radii demonstrarunt fortasse plures, sed invenit & demonstravit primus *ch. Wren* Astronomiæ Professor *Greshamensis*.

Prop. 65.

Solidi quod fit a conversione trianguli rectilinei FDB per quadrantem circuli super basem FD, centrum gravitatis est in plano quadrantis descripti semidiametro $\gamma\gamma$ & erecti ad planum chartæ, & in ea recta quæ ducta a puncto γ dividit arcum ejusdem quadrantis bifariam, distatq; a puncto γ quod est in basi tantum quanta est dodrans duplæ rectæ A v.

Factum enim solidum a revolutione integra trianguli FDB super basem FD est Conus cujus centrum gravitatis dividit basem FD, ita ut pars ad verticem sit ad reliquam ut 3 ad 1, id est in γ. Quare planum erectum ad planum chartæ in communi sectione FD secans eam in γ, est planum æquilibrii tum ipsius Coni tum etiam dimidii vel quotælibet partis ejus. Planum enim æquilibrii dividit hæc in momenta æqualia. Est ergo centrum æquilibrii solidi quod fit à quarta parte conversionis trianguli FD, in plano quadrantis descripti a $\gamma\gamma$, & erecti ad planum chartæ. Quoniam autem arcus quadrantis descripti a DB duplus est arcus BCD descripti ab AB, & centrum gravitatis semicirculi BCD distat a centro A intervallo AO, erit centrum gravitatis semicirculi descripti a DB in distantia, a centro D tanta quanta est dupla AO. Sumatur DT æqualis duplæ AO, ducaturq; FT secans $\gamma\gamma$ in V. Quare, quando in conversione trianguli FDB recta DT fit plano chartæ perpendicularis, erit punctum T centrum gravitatis semicirculi descripti a diametro DB. Secet recta FB rectam $\gamma\gamma$ in X. Quare quando

do in conversione trianguli FDT, γ V est ad planum chartæ erecta, erit punctum V centrum gravitatis semicirculi descripti a semidiametro γ X. Et sic continget in intersectionibus rectarum omnium (quæ sunt parallelæ rectæ DB) cum recta FT, ut centra gravitatis quadrantum descriptorum ab ordinatis in triangulo FDB, sint in intersectionibus ipsarum ordinatarum cum recta FT. Sed intelligendum est triangulum FDT erectum esse ad planum chartæ. Itaq, omnes semicirculi descripti a conversione trianguli FDB super basem FD æquiponderabunt super rectam FT, erectam ad planum chartæ. Sed quod æquiponderabunt etiam super $\gamma\gamma$ similiter erectam manifestum est ex eo quod F γ est ad γ D ut 3 ad 1. Est ergo centrum gravitatis Semiconi descripti a triangulo FDB in puncto V elevato perpendiculariter super planum chartæ sive Horizontis in γ; & distat a puncto γ quod est in base, tantum quanta est $\frac{2}{3}$ arcus semicirculi descripti a semidiametro γ X, sive dodrante rectæ DB.

Rursus, quoniam centrum gravitatis quadrantis *ABC* est ad ν in recta A z quæ dividit arcum *BC* bifariam, erit quoq; centrum gravitatis quadrantis descripti a *DB* in recta quæ dividit arcum quadrantis ejusdem bifariam; distabitq; tantum a puncto *D* quanta est dupla A ν. Sumatur D φ æqualis duplæ A ν, ductaq; F φ secet rectam $\gamma\gamma$ in υ. Quoniam ergo D φ est distantia centri gravitatis quadrantis descripti semidiametro DB a puncto D, & A ν est in recta quæ dividit arcum *BC* bifariam, erit quoq; $\gamma\upsilon$ distantia centri gravitatis quadrantis descripti a γ X & in recta quæ dividit arcum ejusdem quadrantis γ X bifariam. Idem accidit in cæteris omnibus ordinatis trianguli *FDB*. Est igitur F φ diameter æquilibrii solidi quod fit a conversione trianguli *FDB* super basem *FD*. Et recta $\gamma\upsilon$ sumpta in recta quæ dividit arcum quadrantis descripti a γ X bifariam Diameter æquilibrii altera, & $\gamma\upsilon$ dodrans sive $\frac{3}{4}$ rectæ D φ, id est, duplæ A ν. Itaq; punctum intersectionis ambarum $\gamma\upsilon$ & F φ id est punctum ipsum υ est centrum gravitatis Solidi quod fit a conversione trianguli FDB per quadrantem circuli. *Quare* Solidi quod fit, *&c.* *Quod* erat demonstrandum.

Consectarium. Centrum gravitatis quartæ partis Cylindri descripti a conversione integra rectanguli DG super latus FD est in plano quadrantis descripti a $\zeta\zeta$ in distantia a puncto ζ quod est in base tanta quanta est D φ, & est in recta quæ dividit arcum ejusdem quadrantis bifariam. Et centrum gravitatis dimidii Cylindri ejusdem est in recta quæ ex ζ erigitur plano chartæ perpendicularis in distantia æquali rectæ DT.

Prop. 66.

Invenire centrum gravitatis Solidi quod fit a conversione plani Cycloidalis DBF circa basem DF per circuli quadrantem.

Sumatur $\zeta\chi$ æqualis rectæ D φ, & collocetur unus ejus terminus in recta DF ad ζ, & alter terminus in plano quadrantis erecti ad planum chartæ in $\zeta\zeta$, ita ut $\zeta\chi$ faciat cum recta $\zeta\zeta$ angulum semirectum; jungaturq; $\upsilon\chi$ seceturq; $\delta\epsilon$ tam supra quam infra bifariam a recta $\sigma\sigma$, quæ secet $\upsilon\chi$ in τ. *D*ico punctum τ esse centrum gravitatis Solidi propositi.

Quoniam enim Solidum propositum (per *Prop.62.*) est ad Solidum descriptum eodem tempore a rectangulo DG ut 2 ad 3, & centrum gravitatis Solidi facti a rectangulo DG est in plano erecto ad chartam in $\zeta\zeta$, & utriusq; centrum gravitatis in recta quæ facit cum diametro sui quadrantis angulum inclinationis semirectum, cumq; centrum gravitatis Solidi a conversione simili trianguli DBG sit similiter positum ad planum super $\gamma\gamma$, erit centrum gravitatis Solidi propositi (propter rationem magnitudinum 2 ad 1) in eo plano quod distat a plano per $\zeta\zeta$ ex altera parte, ita ut distantia $\iota\zeta$ sit ad distantiam ejus, ex altera parte reciprocè ut 2 ad 1. Erit ergo centrum gravitatis Solidi propositi in plano quod ad planum chartæ est erectum in $\sigma\sigma$. Nam $\iota\zeta$ est 3 quorum $\zeta\sigma$ est $\frac{1}{4}$. Rursus centrum gravitatis Solidi propositi est in recta quæ facit cum recta $\sigma\sigma$ angulum semirectum. Rectarum $\delta\delta$, $\upsilon\chi$ intersectio sit ω. Quoniam jam $\omega\upsilon$ est ad $\omega\tau$ ut 2 ad 1, id est in ratione Solidi propositi ad Solidum factum a simili conversione trianguli DBF; & centrum gravitatis Solidi a triangulo DBF est in υ, si fiat ω centrum libræ, distabit centrum gravitatis Solidi propositi a centro libræ ω, ita ut distantia $\upsilon\omega$ sit dupla distantiæ centri gravitatis Solidi propositi ab eodem puncto ω. Erit ergo in τ. Quod erat demonstrandum.

Consectarium. Sequitur hinc punctum ω positum item in recta $\delta\omega$ ita ut faciat cum recta $\delta\delta$ angulum semirectum esse centrum gravitatis utriusq; simul Solidi, nempe Solidi propositi, & solidi facti a simili conversione trianguli *DBF*.

B. Credo equidem, & præterea punctum *C* esse centrum gravitatis utriusq; simul Solidi, nempe Solidi propositi, & Solidi quod fit a conversione simili plani Cycloidalis externi BFG. Video etiam basem *FD* ita dividi a plano æquilibrii $\sigma\sigma$ ut pars Fσ sit ad reliquam ut 5 ad 3, ut fit in semiparabola; nec mirum, cum ratio Solidi propositi sit ad suum complementum eadem quæ plani semiparabolici ad complementum suum. Cæterum *BD* non dividitur in 3 ad 2 ut Diameter semiparabolæ. Cujus rei causam non video.

A. Neq;

A. Neq; ego ; sed neq; quare ita esse debeat. Ex iis quæ demonstrata sunt de ratione propositi Solidi facti a conversione ejus circa basem *FD*, ad Solidum factum a simili conversione rectanguli *DG*, & de centris gravitatis ipsorum, Methodus apparet inveniendi rationem Solidi facti a conversione cujuslibet partis ejus abscissæ a parallela altitudinis quacunq;. Nam si planum Cycloidale cujus basis (exempli causa) est A*f* convertatur super basem suam A*f* recta quidem *AB* describet quadrantem integrum, reliquæ autem ipsi parallelæ describent arcus quadrantum minores semper in ratione Arithmetica, donec in puncto *f* describatur nihil. Ex quo, ut ante, inferetur Solidum factum a conversione plani Cycloidalis AB*f* super Basem A*fz* duplum esse Solidi quod fit a simili conversione trianguli *f*AB ; Cognitisq; magnitudinum rationibus invenientur, ut ante, eorum centra gravitatis.

Prop. 67.

Solidum factum a conversione rectanguli *DG* per quadrantem circuli, circa diametrum circuli genitoris *DB* (quæ est Cylindri totius sic facti altitudo) est ad Solidum factum a conversione ejusdem rectanguli *DG* circa rectam *DF* (quæ est Cylindri hujus altitudo) ut *DF* ad illius altitudinem *DB*.

Sunt enim Cylindri inter se in ratione composita basis ad basem (id est diametri basis ad diametrum basis duplicata) & altitudinis *DB* ad altitudinem *DF*. Sunt autem rectæ *DF*, *DB*, D*u* (per *Prop.* 55.) continuè proportionales. Est igitur basis ad basem ut *DF* ad D*u*. Componitur ergo ratio Cylindri facti a conversione plani *DG* circa altitudinem propriam *DB* ad Cylindrum factum a conversione circa altitudinem propriam *DF*, ex rationibus altitudinis *DF* ad D*u*, & *DB* diametri basis, ad *DF*, hoc est rectæ, D*u* ad altitudinem *DB*. Si componantur ergo ratio *BD* ad D*u* (id est ratio basis ad basem) & ratio *DB* ad *DF* id est D*u* ad *DB*, erit ratio Cylindri facti a conversione ejusdem rectanguli *DG* circa *DB* ad Cylindrum factum a conversione ejusdem rectanguli circa *DF* in ratione composita, ex rationibus *DF* ad D*u*, & D*u* ad *DB* ; & propterea Cylindrus ad Cylindrum & proinde $\frac{1}{4}$ illius ad $\frac{1}{4}$ hujus, est ut *DF* ad *DB*. Quod erat demonstrandum.

B. Si certum esset quod Cylindri sunt inter se in ratione composita ex rationibus basis ad basem, & altitudinis ad altitudinem, dubitari non posset de Theorematis hujus veritate. Sed ubi est hoc demonstratum ?

A. Demonstravit *Hobbius lib.* de Corpore *cap.* 13. *Art.* 14. Quod caput ipse *Wallisius* non improbavit, sed quia nihil in eo reperit quod

potuit

potuit rodere, *Hobbii* ipsius esse negavit. Non quod alienum revera esse putarat, sed quia instituto ejus mentiri expedivit. Theorema hoc non modo in quantitatibus factis, sed etiam in omni genere rerum factarum verum est. Neq; arte Logicæ, sed ratione tantum naturali opus est ad veritatem ejus agnoscendam. Satis enim manifestum est quod omnis Effectus naturalis ad omnem Effectum naturalem rationem habet compositam ex rationibus earum rerum quæ causas eorum componunt integras. Nihil enim in effectu esse potest quod non fuit in aliqua parte Causæ suæ; nec in Causa quod non in Effectum derivetur.

B. Mihi nova quidem hæc contingit doctrina, attamen verissima est & procedens a contemplatione quæ in iis (qui jurant in verba magistrorum) raro invenitur. Videamus jam consectaria.

Consectarium 1. Conus qui fit a conversione trianguli *FDB* circa *DB* diametrum circuli genitoris est ad Conum qui fit a conversione ejusdem trianguli circa *DF* ut *DF* ad *DB*. Sunt enim ut ipsi Cylindri. Habent autem vertices ille in *B*, hic in *F*.

Consect. 2. Solidum factum a conversione plani Cycloidalis *D B f* F circa *DB*, est ad Solidum factum a conversione ejusdem plani Cycloidalis circa *DF*, ut *DF* ad *DB*. Sunt enim ut ipsi Coni.

Consect 3. Excessus Cylindri facti a conversione rectanguli *DG* circa *DB*, super Solidum factum a conversione plani Cycloidalis DB*f*F circa eandem *DB*, est ad excessum Cylindri facti a conversione rectanguli *DG* circa *DF* super Solidum factum a conversione plani Cycloidalis DB*f*F circa eandem *DF*, ut *DF* ad *DB*. Sunt enim hi quoq; ut Cylindri ipsi.

Prop. 68.

Centrum gravitatis semicirculi cujus diameter est *DF*, id est recta æqualis arcui *BCD* est in recta quæ ducta a centro dividit ipsum semicirculum bifariam, & distat a centro *D* tantum quanta est recta æqualis duabus tertiis semiradii *AB*.

Ostensum enim est, Quod centrum gravitatis semicirculi *ABCD* est in recta *AC* quæ a centro *A* dividit semicirculum *ABCD* bifariam, distatq; a puncto *A* tantum quanta est *AO*, id est, quanta est duæ quindecimæ rectæ *DF* sive arcus *BCD*. Sed in omnibus semicirculis centra gravitatis situm habent similem. Quare centrum gravitatis semicirculi, cujus diameter est *DF*, distat a puncto *D* tantum quanta est duæ quindecimæ arcus semicirculi cujus diameter est *DF* æqualis Arcui *BCD*. Est autem arcus semicirculi cujus diameter est æqualis arcui

arcui *BCD*, æqualis (per *Prop.* 11.) quinque ſemiradiis ſive quintuplæ *EO* Itaque centrum gravitatis diſtat a centro D tantum quanta eſt duæ quindecimæ quintuplæ *AB*, id eſt duæ tertiæ ſemiradii *AB*. Quod erat demonſtrandum.

Conſectarium. Dato centro gravitatis ſemicirculi, datur quoq; centrum gravitatis dimidii ejus; atq; etiam cujuſlibet Sectoris qui ſit ſemicirculi quotalibet pars.

B. Methodo (ut videtur) eadem qua centra gravitatis partium Cylindri facti a converſione plani DG circa DF inventa ſunt, inveniri poſſunt etiam centra gravitatis partium Cylindri facti a converſione ejuſdem plani DG circa DB; Quid ergo ea quæ reſtant non demonſtras?

A. Primo quia hæc parata habui, cætera nondum contemplatus ſum. Secundo, quia alia Figura deſcribenda eſſet, in qua ſemicirculus, cujus diameter eſt DF eſſet deſcribenda, & non paucioribus lineis quam hæc onerata eſt, oneranda; id quod mihi quidem operæ pretium eſſe non videtur. Nam ſemicirculorum quidem, & quadrantum, & aliorum ſectorum centra gravitatis cognoſcere, utilitatem aliquam habet ad magna ædificia, propterea quod ſaxa grandia talis formæ appenſa a centris gravitatum ſuarum elevari in altum poſſunt Horizontaliter, & proinde aptè collocari; quod aliter fieri non poteſt, ſine multo labore, atq; etiam periculo, ne dum vectibus detorqueantur, diffringantur.

B. Redigis mihi in memoriam fabulam Vulpis & Racemi.

A. Irride quantum libuerit, ego hæc nihilominus relinquam illis quibus longius ſperatur tempus vivendi.

Credo te qui demonſtrationibus legendis animum acriter intendere ſolitus es, ſatis jam tandem defatigatum eſſe.

B. Ego vero minimè. Delector enim Paradoxis, qualia ſunt hæc quæ legimus fere omnia.

A. Itane ais?

B. Quid ni? Quod punctum magnitudinem, etſi aliquando non conſideratam, aliquam tamen habeat, Paradoxum non eſt?

A. Eſt quidem, ſequutis doctorum authoritatem; utentibus autem ratione propria Paradoxum non eſt.

B. Quod Ratio ea quidem quam habent inter ſe duo inæqualia quantitas ſit, ea vero quam habent duo æqualia quantitas non ſit, Paradoxum eſt. Quod in tribus continuè proportionalibus quorum primum eſt minimum, Ratio primi ad ſecundum ſemiſſis eſt Rationis primi ad tertium. Quod angulus rectilineus eſt quantitas converſionis Radii circa centrum. Quod angulus Contactus eſt quantitas, eſſe tamen angulos ad quos ille rationem habeat nullam. Deinde illa quæ

hinc deduxisti, nempe, latus quadrati, quod quadratum æquale sit decem quadratis a quarta parte diametri, æquale sit arcui quadrantis, contra *Archimedem*. Quod arcum vel angulum dividis in rationem datam. Quod centrum gravitatis semicirculi tantum distat a centro circuli quanta est [illegible] arcus ejusdem semicirculi, nonne hæc tua & *Hobbiana* Paradoxa sunt Geometrica?

A. Sunt quidem Paradoxa, nihil tamen impedit quo minus vera sint, & fortasse in rebus, quales sunt hæ, speculationis aliquanto profundioris, nihil tam Paradoxum est quam ipsa veritas.

B. Paradoxum quoq; est quod Regulam Algebræ (id est delicatorum hominum Geometriam totam) in Figuris curvilineis parum aut nihil valere dicis.

A. In scriptis Geometricis aliorum nulla credis esse Paradoxa? Primo, lineam latitudinem non habere, & tamen duci posse. Secundo, angulum planum esse inclinationem quam habent duæ lineæ concurrentes, in ipso puncto concursus. Tertio, posse transiri a majore ad minus per omnia media, nec tamen per æquale. Quarto, duplicatum minus esse quam Simplum.

B. Cujus hoc sit non memini.

A. Nonne omnes affirmant in ratione minoris ad majus duplicata (exempli causa) in his continuè proportionalibus 1. 2. 4, rationem 1 ad 4 duplicatam esse rationis 1 ad 2, iidem tamen (cum *Eucl. Ele.* 5. *Prop.* 8.) Rationem 1 ad 2, quæ est simpla, majorem esse quam Ratio 1 ad 4, quæ est duplicata.

B. Non sunt hæc Paradoxa.

A. Quid ergo sunt?

B. Absurda. Sed ultimum hoc de duplicata ratione ex eo natum esse videtur quod *Euclides* utitur voce διπλασίονι semper pro *duplicata*, nunquam pro *dupla*.

A. Quid autem? An Geometram decet Theorematum veritatem ex usu verborum, an ex rebus ipsis rectè conceptis æstimare. Sed quod *Euclidem* ais nunquam uti voce διπλασίονι pro duplo verum non est. Lege *Elem.* 3. *Prop.* 20. quæ sic se habet, Εν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, &c.

B. Tua illa quanquam Paradoxa vera tamen sunt, ut mihi videntur, & futura aliquando Endoxa. Interea tu, qui defendis omnem doctrinam *Hobbianam*, quid dicturus es ad ea quæ habet in Physica sua & Politica. Et primo, in Physica, quod omnium rerum naturalium causas dicit esse Motum, eumq; Moti & contigui corporis.

A. Sive verum hoc sit sive falsum, Paradoxum certè non est. Nam *Aristoteles* quem sequitur schola, idem dicit, si non & amplius,

plius, cum dicat *Naturam* nihil aliud esse præter *Motum*; Motum autem proprium esse corporis. Quod internum esse dicat, non negat quin causam habeat in externo. Nam affirmat alibi *nihil posse movere seipsum*. Ab hoc Principio orsus causas qualitatum sensibilium & Phænomenωn Naturalium fere omnium satis probabiles deducit *Hobbius*; id quod illi quibus Principium hoc videtur falsum facere nunquam poterunt.

B. Maximam partem Effectuum Naturalium deducit ille a motu quodam quem vocat *Circularem Simplicem*, quem motum vereor ne Lectores, exceptis paucis non satis concipiant. Nam etsi talis motus ad producenda Phænomena Naturæ ferè omnia sit omnium motuum aptissimus, quia tamen a nemine ante illum animadversus & explicatus est, Lectores pauci ductum Orationis, qua motus ille describitur & Computatur, facile sequi possunt.

A. Si quis manu teneat corpus aliquod figuræ cujuscunq;, puta Pilam, e qua Pila promineret stylus scriptorius, an difficile est imaginari quo modo ille eo stylo possit literam aliquam Alphabeti ductu continuo exarare?

B. Nihil facilius.

A. Quod si plures simul styli prominerent, ita ut tabellam aliquam omnes simul tangerent, nonne idem eodem tempore literas plures exarare poterit?

B. Mille si vult, & tot sint styli. Sed illæ erunt omnes inter se similes et æquales.

A. Id quidem manifestum est. Sed quis interea motus & qualis dicetur totius Pilæ.

B. Profecto, quem motum habet unius styli cujuslibet cuspis, eundem habebit cuspis styli alterius cujuscunq; ; imo vero punctum unum quodlibet tum Pilæ tum manus.

A. Motus jam Pilæ ipse est, quem appellat ille *Motum Circularem Simplicem*, non modo quando Pilæ puncta describunt Circulos, sed etiam quando quaslibet alias describunt figuras, modo puncta illa motu suo ad loca redeant unde moveri inceperunt. Cujus motus proprietas una est ut quælibet linea in Pila sumpta feratur sibi semper Parallela. Notandum est etiam hoc, Quod Naturæ non repugnat tali motu quamquam velocissimo describi posse figuram etiam minutissimam. Hunc motum Telluri quidem toti attribuit *Copernicus*; *Hobbius* autem etiam Soli, & Planetis omnibus, & singulis etiam minimis eorum partibus. Aliam ejusdem motus proprietatem ostendit esse quod Heterogenea segregans congregat Homogenea. Atq; ex his proprietatibus causas reddit omnium ferè Phænomenωn Natura-

ium, satis probabiles, tantas ubiq; Magnitudines & Velocitates supponens quantas effectus cujus causa quæritur postulat.

B. Nihil a Physicis, quorum Principia, ut Geometrarum, proprio arbitrio certa statui non possunt, amplius requirendum est, quam ut causæ rerum tales esse possint. Itaq; Physica illa *Hobbii* tam diu improbanda non est, quam diu nemo eorundem Effectuum per alios motus causas reddiderit probabiliores.

A. Id quod nunquam, credo, fiet. Nam causa naturalis omnis rei est motus aliquis; ii autem qui philosophiæ maximè nunc studentes naturam motus minime contemplati sunt, in hanc unam rem incumbunt, ut nova acquirant Phænomena; cum Phænomena sola experiendo, causæ ratiocinando a Motu cognoscendæ sunt.

B. Qui corpora corporibus admovendo, nova & mirabilia ostendunt Naturæ opera, mirum in modum incendunt animos hominum amore Philosophiæ, & ad causas investigandas non parum instigant, eoq; nomine laude digni sunt.

A. Ita est; nam Historiam Naturalem (sine qua scientia Naturalis frustra quæritur) locupletant. Sed intueri & admirari Naturæ opera, ut puer Pulchritudinem libri plus Contemplatur quam literas, non est hominis Philosophi; id quod faciunt qui videntes Phænomena, non considerant quo Agente, quo motu, & quo modo generari potuerunt. Nam si experimentia rerum naturalium, scientia dicenda sit, Optimi omnium Physici sunt Pharmacopœi.

B. Cæterum Dogmata aliorum de iisdem rebus consideremus paulisper. Luminis quænam est causa efficiens? *Lumen* (dicit aliquis) *est corpus cujus particulæ exeuntes e Sole, penetrant oculos animalium, unde vident.* Quidni eadem facilitate & veritate dicant etiam tenebras esse corpuscula, quæ exeuntia ab aliquo corpore tenebroso & delata ad oculos faciunt ut non videant. *Lumen* (dicit alius & magis accedens ad veritatem) *est inclinatio ad motum.* Sed id quod jam est ad motum inclinatio, quid impedire potest ne non sit ipse motus? Si quæras quæ sint Causæ Rari & Densi, dicit alius quod idem corpus, quo plus quantitatis habet, eo Rarius, quo minus eo Densius esse. Sed quæris (puto) tu qua de causa, & quo pacto effici potest, ut idem numero corpus, id est corpus sibi semper æquale, possit habere quantitatem modo minorem, modo majorem.

B. Ego vero id non quæro. Scio enim quod est impossibile. Sed corpora videmus modo augeri, modo diminui, quæ tamen eadem esse dicimus.

A. Non autem idem numero corpus esse possunt, nisi idem esse censeas Totum & Pars. Sed hæc nihil attinent ad Densum & Rarum.

An

An putas idem vas plenum Aquæ majus minusve esse quam si plenum esset quocunq; alio corpore?

B. Minimè profecto.

A. Quidam ex Philosophis hujus seculi causam Rari & Densi explicat hoc modo. Si dato corpori immisceatur quantitatis plus, fit Rarum; si minus, Densum.

B. Nullus omnino est Effectus naturalis cujus causa non facillime sic expediatur, & eodem modo quo Pharmacopolæ temperant sua Pharmaca ad præscriptum Medicorum. Recipe Corporis puri ad libitum; Gravitatis gradus octo; quantitatis paululum; Coloris flavi quantum sufficit; Misce. Fiat aurum. Lepidam narras Philosophandi Methodum.

A. Et eam quidem Philosophiæ reformatæ. Vide jam antiquiorem, Quæritur quænam sit Causa quod Magnes ferrum ad se trahit. Respondetur, per Συμπαθείαν. Quæritur rursus, Quid est Συμπαθεία. Respondetur, Occulta qualitas. Quæritur etiam, Quid est, Occulta qualitas. Respondetur, Quam nescimus. Nonne ad primam interrogationem melius responsum esset, Nescio?

B. Minime sane. Sic enim visi fuissent cum jactura aliqua authoritatis suæ nihilo plus sapere quam vulgus hominum.

A. Ita est. Respexerunt ergo ad utile deserta honestate.

B. In Politica autem, quis unquam ante illum, tantum Summis Imperantibus Juris attribuit, ut quicquid illi jusserint, eo ipso quod jusserint, sine injuria esset?

A. Imo vero, quæ Civitas unquam extitit ubi Summo Imperanti minus Juris concessum est. Civitatis Romanæ Imperium Summum quis Jure habuit?

B. Ipsa quidem Civitas semper, Civitatis autem munus exequebatur modo unus modo alius, & post *Tarquinium*, ante *Cæsarem*, Senatus Populusq; *Romanus*.

A. Legistin' unquam quod *Romæ* pro injuria habitum sit, quod de Cive *Romano* constituisset Senatus populusq; *Romanus*?

B. Non memini.

A. Cur ergo injuriam nominaremus nos, id quod constitueret Senatus populusq; *Anglicanus*?

B. Non faceremus, sed quod unus homo vel pars aliqua populi juberet non dubitaremus aliquando injustum dicere.

A. Quid autem intelligis per *Injustum*?

B. Id quod factum est contra Leges.

A. Quid sunt Leges?

B. Jussa Civitatis, id est, jussa Curiæ sive Cœtus illius qui a Civibus

vibus eligitur, ut totam Civitatem repræsentet. Non enim pars millessima Civium Romanorum potuerunt in forum convenire.

A. Non ergo ille unus homo, aut pars populi habebat Imperium Summum.

B. Minimè.

A. Nondum ergo ostendisti injustum esse habitum quod factum est a Summo Imperante, sed tantum sententiam tuam de Forma Regiminis summi subindicasti, de qua hoc loco disputare nolo. Dicam tantum, quod est verissimum, si singuli Cives representari se jusserint ab uno homine, & per consequens, illius esset Imperium Summum, id quod ille jusserit non minus pro justo habendum esse, quam si idem jussisset Senatus & *P*lebs eandem habentes authoritatem. Nihil ergo in Politica peccavit certè hactenus.

B. Nihil profectò. Sed Parturit jam *Anglia*, & hoc ipso die speratur nascitura Pax & Imperium firmum. Quod nisi *Justitiæ Libra Gladius Belli*, & *Virga scholæ* in eadem sint manu, diuturnum esse vix potest.

A. Finem ergo sermonibus nostris tandem imponentes, si placet surgamus, & precemur Deum, ut illis qui de Imperio *Angliæ* nunc deliberant, id decernant quod ad ipsius gloriam amplificandam, & ad statum Civitatis confirmandum erit convenientissimum; maximè verò ut velint Imperium in eum locum, unde avulsum est, restituere.

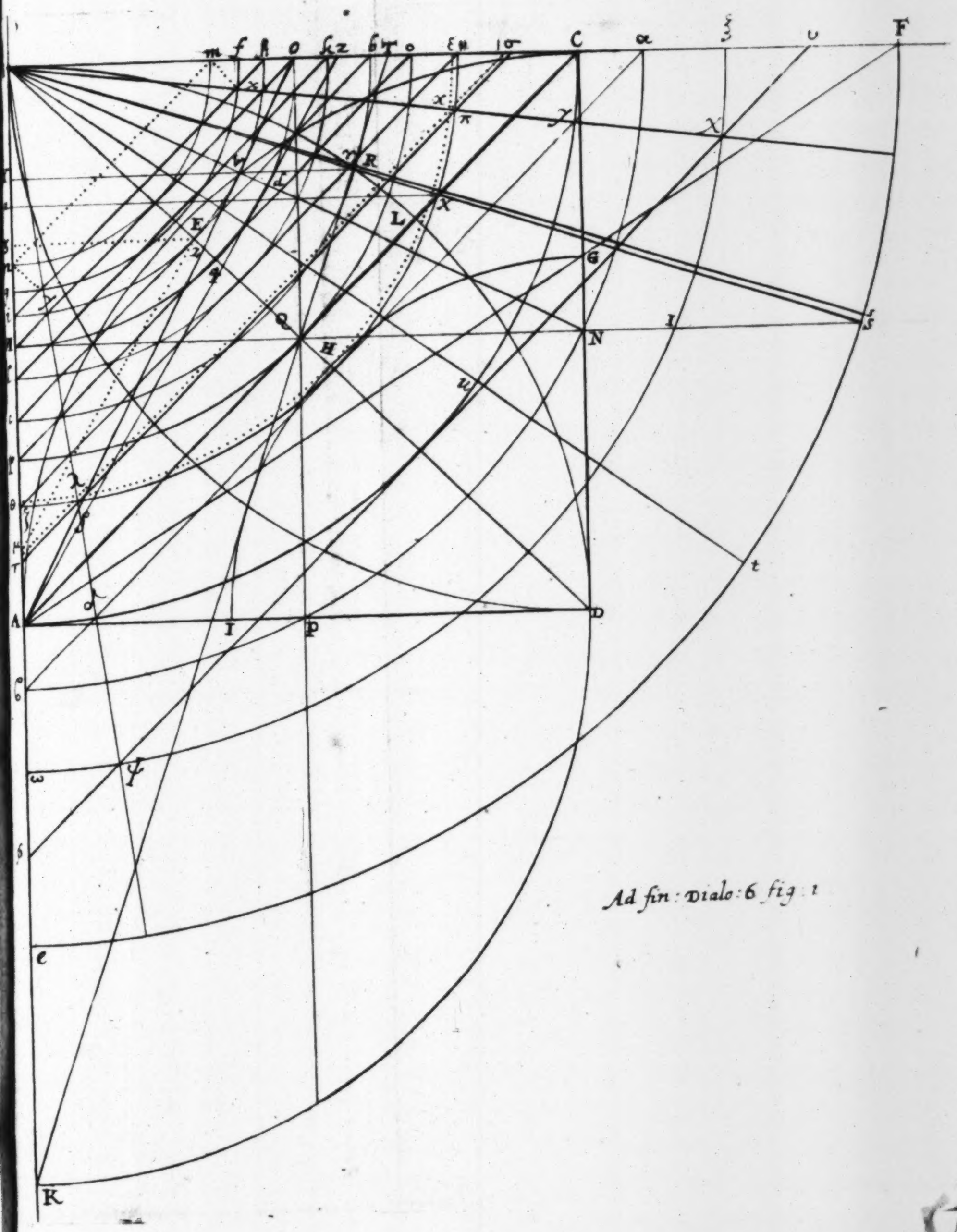
B. Amen.

FINIS.

Quæ sequuntur, Correctiones quædam sunt libri *de Corpore* Latinè editi, quorum correctiones ex Editione *Anglica* hic apponuntur, eo fine ut liber ille, si cui dignus videbitur aliquando qui operâ suâ, unà cum cæteris Sectionibus denuò imprimatur, veniat in manus Lectorum emendatior. Si vero non videbitur, quid mea qui abeo?

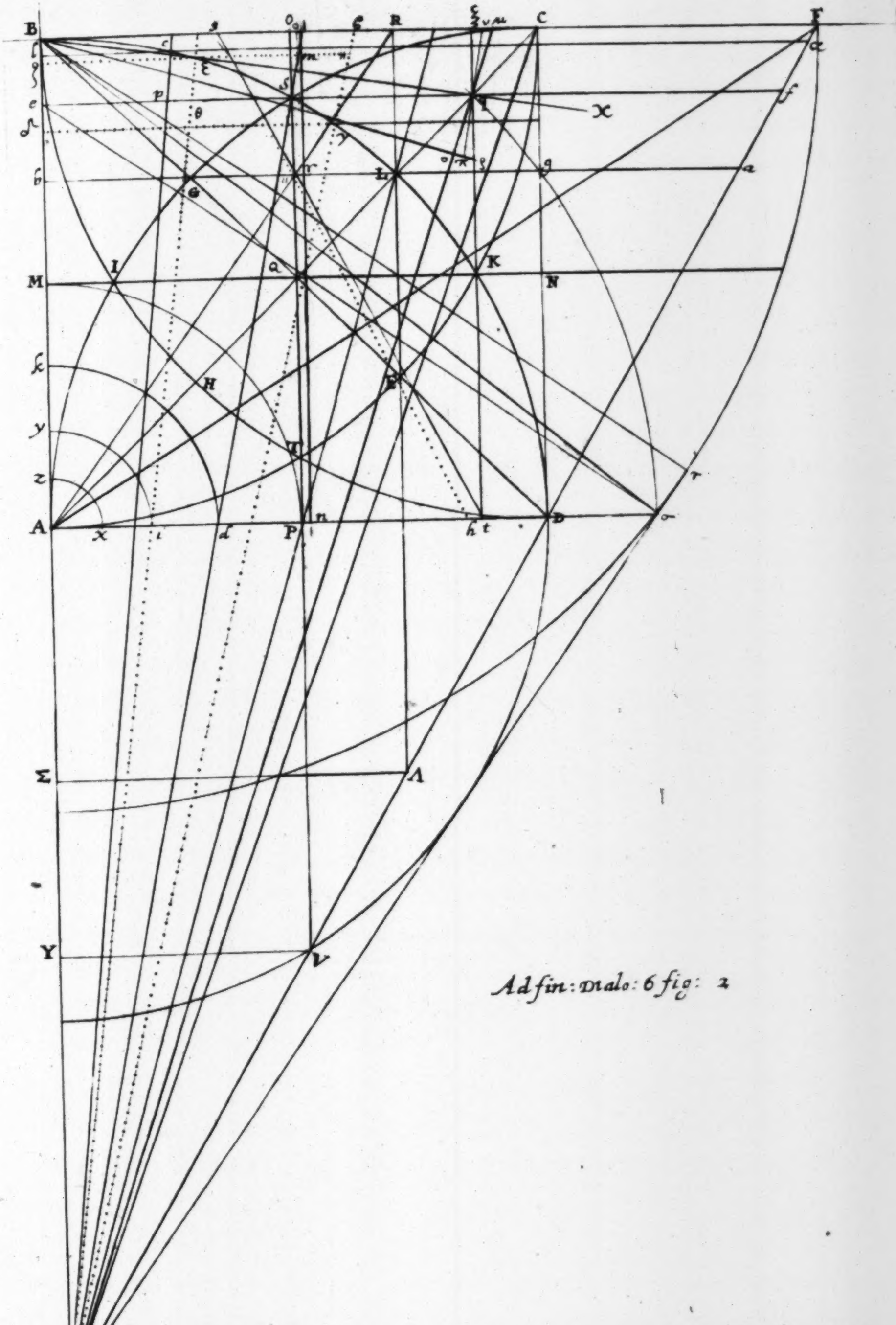
In locum Capitis decimi octavi substituatur quod sequitur.

De

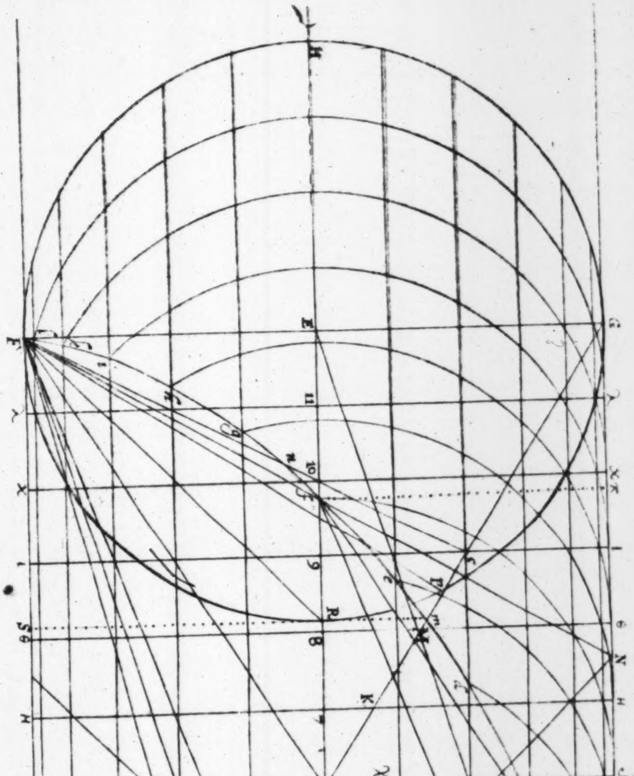


Ad fin: Dialo: 6 fig: 1

[illegible]



Ad fin: Dialo: 6 fig: 2



Ad fin: Dialo 6: fig: 3

De Rectarum & Paraboliformium linearum Æquatione.

1. Datæ lineæ Parabolicæ æqualem exhibere rectam. 2. Datæ lineæ curvæ Parabolastri primi, sive Parabolæ cubiformis, rectam invenire æqualem. 3. De rectis inveniendis cæteris ex genere Parabolico curvis lineis æqualibus methodus Generalis.

1. Datæ lineæ Parabolicæ æqualem exhibere rectam.

Sit linea Parabolica data ABC (*Fig.* 1.) & inventa diameter AD. Ducatur basis DC, & compleatur Parallelogrammum ADCE; jungaturque AC, & divisâ AD bifariam in F, ducatur FH æqualis & parallela rectæ DC, secans AC in K, & lineam Parabolicam in O. Deinde inter FH & FO sumatur media proportionalis FP, ducanturque rectæ AO, AP & PC. Dico duas rectas AP & PC simul sumpas æquales esse lineæ Parabolicæ ABOC.

Nam linea ABOC cum sit Parabolica, generata est a concursu duorum motuum, altero uniformi ab A ad E, altero eodem tempore uniformiter accelerato a quiete in A ad D. Cum autem motus ab A ad E sit uniformis, potest AE repræsentare tempora utriusque motus. Sit ergo AE Tempus; quare rectæ in Semiparabola Ordinatæ designabunt partes temporis in qua corpus quod describit lineam ABOC est in unoquoque ipsius puncto, ita ut quemadmodum in fine temporis AE vel DC corpus illud est in C; ita in fine tempor- FO erit in O. Et quoniam Velocitas in AD crescit uniformiter, id est in ratione temporum, eædem Ordinatæ in semiparabola designabunt perpetua incrementa Impetûs, donec fiat maximus, qui maximus Impetus designatur a base DC. Itaque supposito quod motus sit uniformis, corpus quod est in A, tempore FK, propter concursum duorum motuum uniformium in AF & FK, movebitur uniformiter in AK. Et KO erit incrementum Impetus (vel velocitatis) acquisiti tempore FK; & AO describetur uniformiter a concursu duorum motuum uniformium per AF & FO, in tempore FO. A puncto O ducatur OL Parallela rectæ EC, secans AC in L; & LN parallela DC, secans EC in N, & lineam parabolicam in M, & producatur ex altera parte ad AD in I; eruntque IN, IM, & IL (per con-

constructionem parabolæ) in ratione continua, & æqualis tribus rectis FH, FP, & FO singulæ singulis; & recta quæ sit rectæ EC parallela transiens per M, incidet in P, & proinde OP erit incrementum Impetus acquisiti tempore FO vel IL. Postremo producatur PM ad CD in Q, eritque QC, vel MN, vel PH incrementum Impetûs proportionale tempori FP, vel IM, vel DQ. Supponatur jam motus uniformis ab H ad C in tempore PH. Quoniam ergo in tempore FP motu uniformi, & Impetu crescente in ratione temporum describitur recta AP, & reliquo tempore & Impetu, nimirum tempore & Impetu PH, describitur CP uniformiter, sequitur totam lineam APC descriptam esse Impetu toto, & tempore eodem in quo describitur linea Parabolica ABC. Quare linea APC composita ex duabus rectis AP & PC æqualis est lineæ parabolicæ ABC. Inventa est ergo recta æqualis curvæ lineæ semiparabolæ. Quod erat faciendum.

2. Lineæ curvæ Parabolastri primi, sive Parabolæ cubicæ, invenire æqualem rectam.

Sit ABC (*Fig.* 2.) linea curva Semiparabolastri primi; AD diameter; DC basis; compleaturque parallelogrammum ADCE, cujus diagonalis sit AC. Secetur diameter bifariam in F, ducaturque FH æqualis & parallela DC, secans AC in K, & curvam in O & rectam EC in H. Deinde ducatur OL parallela EC, secans AC in L, ducaturque LN parallela basi DC, secans curvam in M, & EC in N, producaturque ex altera parte ad AD in I. Postremò, per punctum M ducatur PMQ Parallela & æqualis HC, secans FH in P, junganturque CP, AP, & AO. Dico duas rectas AP & PC simul sumptas æquales esse curvæ ABOC.

Nam linea ABOC, cum sit linea curva Semiparabolastri, generata est a concursu duorum motuum altero uniformi ab A ad E, altero eodem tempore accelerato a quiete in A ad D, ita ut Impetus crescat in ratione triplicata ejus secundum quam crescunt tempora, sive (quod idem est) longitudines transcursæ sunt in ratione triplicata temporum quibus transcurruntur. Nam ut Impetus sive Velocitates crescunt, ita crescunt etiam transcursæ longitudines. Et quoniam motus ab A ad E est uniformis, recta AE potest repræsentare Tempus, & per consequens, rectæ ordinatim applicatæ in Semiparabolastro, designabunt partes Temporis, in quo corpus incipiens a quiete in A, motu suo describit lineam ABOC. Et quia DC, quæ repræsentat Impetum acquisitum maximum æqualis est ipsi AE, eædem ordinatæ repræsentabunt singula incrementa Impetûs crescentis a quiete in A. Itaque si supponatur motus uniformis ab A ad F in tempore FK, describetur a concursu duorum motuum uniformium

formium per AF & FK, linea AK uniformiter; & KO erit incrementum Impetus pro tempore; & per concursum duorum motuum uniformium per AF & FO, describetur Linea AO uniformiter. Per punctum L ducatur recta LMN parallela DC, secans rectam AD in I, curvam ABC in M, & rectam EC in N; & per punctum M rectam PMQ parallelam & æqualem AC, secans DC in Q, & FH in P. Itaque a concursu duorum motuum uniformium per AF & EP, in Tempore FP describetur uniformiter recta AP. Et LM vel OP erit incrementum Impetûs addendum pro tempore FO. Et quia ratio IN ad IL triplicata est rationis IN ad IM, ratio FH ad FO erit etiam triplicata rationis FH ad FP. Et Impetus acquisitus tempore FP est PH. Itaque cum FH sit æqualis PC quæ designabat Impetum totum acceleratione acquisitum, nullum amplius Impetûs incrementum computandum est. Jam in tempore PH si supponatur motus uniformis ab H ad C, describetur uniformiter a duobus motibus per CH & HP uniformibus recta linea PC uniformiter. Cum ergo duæ rectæ AP & PC descriptæ sint tempore AE cum eodem incremento Impetûs, quo curva linea ABOC describitur eodem tempore AE, id est cum linea composita a rectis AP, PC. & linea ABOC transcursa sit ab eodem corpore eodem tempore, & æquali velocitate, ipsæ lineæ erunt æquales. Quod erat demonstrandum.

Eadem Methodo recta linea inveniri potest æqualis lineæ curvæ cujuscunque Semiparabolastri eorum quæ disponuntur in Tabella Articuli 3[i] Capitis 17[i]; nempe, secando Diametrum bifariam, & procedendo ut antè.

Cap. 4. Art. 4.	l. antepenultima dele *itaque*. l. ultima pro *necessarius non est* lege *necessariæ*.
Cap. 5. Art. 2.	l. 9. pro *ut Nomen copuletur cum Oratione* scribatur *ut Nomen Rei copuletur cum Nomine Orationis*. l. 27. pro *Corporis* scribatur *Rei*. & pro *cum Oratione* scribatur *cum Nomine Orationis*.
Cap. 14. Art. 12.	l. 6. inter *ipsarum* & *Angulos* interpone *ad easdem partes*.
	l. 15. pro *erunt* BE, DF *æquales* scribatur *erunt anguli* EBA, FDC *æquales*.
	l. 19. pro *non ergo intercipiuntur parallelæ* scribatur *non erunt ergo Anguli* EBA, FDC *æquales*.

Cap. 14 Art. 14. l. 10. pro *si jam.* &c. usque ad finem paragraphi scibatur *si jam punctum* A *intelligatur moveri uniformiter per* AB, *& eodem tempore punctum* B *moveri ad* C, *& omnia puncta* F, D, B *moveri uniformiter & æquali inter se velocitate per* FG, DE, BC, *punctum* B *percurret* BH (*æqualem* FG) *eodem tempore quo punctum* A *percurrit* AF. *Et erit ratio* AF *ad* FG *ut illius velocitas ad hujus velocitatem. Et quando* A *est in* F *erit* D *in* K; *& quando* A *est in* D *erit* D *in* E. *Et ut punctum* A *transit per* F, D, B, *ita* B *transit per* H, I, C. *Et rectæ* FG, DK, KE, BH, HI, IC *sunt* (*propter parallelismum*) *æquales. Quare ut velocitas per* AB *est ad velocitatem per* BC, *ita est* AB *ad* BC. *Id est, singulæ parallelæ erunt ad partes a Vertice abscissas ut* AF *ad* FG. *Itaque* AF. FG : : AD. DE : : AB. BC *sunt proportionales.*

Cap. 16. Art. 1. lineis tribus ante finem, inter *semissem* & *Nam* interponantur hæc verba, *alterum, semissem Impetus maximi.*

Coroll. 3. Art. 4. l. 1. pro *in motu uniformiter accelerato* scribatur *in motu ita accelerato, ut Impetus crescat in ratione Temporum duplicata.*

Cap. 19. pro ultimis verbis *demonstrabitur Capite proxime sequente Articulo tertio* scribatur *demonstrabitur alio loco.*

Cap. 20. Paragraphus post finem Coroll. Art. 2. incipiens per *scio* deleatur. ad finem Consectarii Art. 3. verba illa *& laudes,* &c deleantur.

Cap. 23. Art. 9. Novem lineis ante finem, pro *quæ rationes sunt, &c.* usque ad finem Paragraphi, scribatur. *Sed ratio* AL *ad* AZ *componitur ex rationibus* AL *ad* BZ & BZ *ad* AZ. *Jam ratio* BZ *ad* AZ *est ratio ponderum reciproca, id est ponderis* CIAPE *ad pondus* CDFE. *Itaque ratio reliqua* AL *ad* BZ, *id est* LB *ad* BZ *est ratio momenti ponderis* CDFE *ad momentum ponderis* CIAPE. *Sed ratio* AL *ad* BZ *componitur ex rationibus* AL *ad* AZ, *&* AZ *ad* BZ, *quarum rationum ea quæ est* AZ *ad* BZ, *est ratio ponderis* CDFE *ad*

ad pondus CIAPE. *Quare (per Articulum quintum) reliqua ratio* AL *ad* AZ *est ratio distantiarum punctorum* Z *&* L *a Centro Libræ, quod est* A. *Quare (per* Art. 6.*) pondus* CIAPE *æquilibratum erit super rectam* OZ. *Est ergo* OZ *altera diametrorum æquilibrii ponderis* CIAPE. *Sed altera ejusdem ponderis diameter æquilibrii est recta* AB. *Quare (per* Def. 7.) *punctum* Z *est centrum gravitatis ponderis* CIAPE *quod punctum (per constructionem) dividit axem ita ut pars* AZ *quæ est ad Verticem, sit ad partem reliquam* BZ, *ut Figura completa* CDFE *ad Figuram Dificientem* CIAPE. *Quod erat demonstrandum.*

Books written by this Author besides these Dialogues.

In Latine:
1. *De Corpore.* The same in English with 6 Lessons to the Professors of Geometry in *Oxford.*
2. *De Homine.*
3. *De Cive.*

In English —
1. *Leviathan.*
2. *Marks of the Absurd Geometry*, &c. of *John Wallis* Professor, *&c.*
3. *Of Liberty and Necessity* against Bishop *Bramhall.*

MVSEVM
BRITAN
NICVM

Cap: XVIII

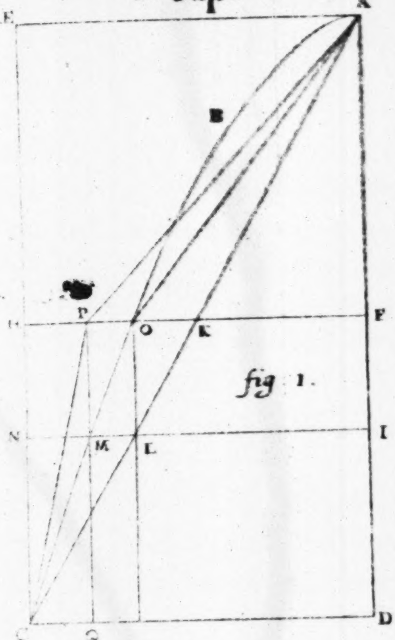


fig 1.

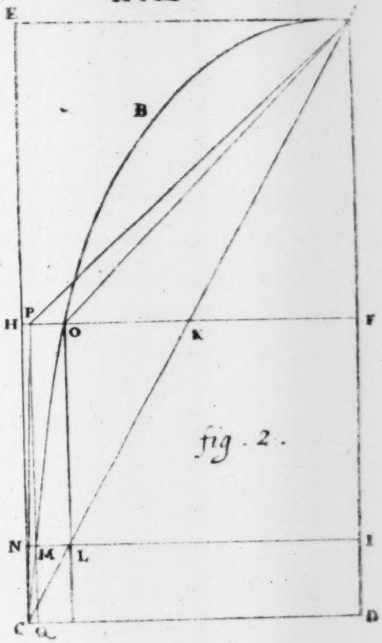


fig. 2.

Ad fin: lib:

Ad fin: Dialo: 5'